

הנושא: **בעיה ופתרונה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל

תקציר: בחומר מובאת בעיה בה צריך לזהות איזה גבר נשוי לאיזו אישה. הבעיה משלבת הגיון ואלגברה. הפתרון ע"י שימוש בפירוק לגורמים של הפרש ריבועים.

מילות מפתח: אלגברה, טכניקה אלגברית, פירוק לגורמים, נוסחאות הכפל המקוצר, פתרון מערכת משוואות עם שני נעלמים, בעיות מילוליות.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 49, אייר תשל"ז.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

בעיה ופתרונה

הבעיה הבאה הופיעה בעיתון לנשים בארה"ב במחצית הראשונה של המאה ה-18. אנחנו רק עיברתנו את השמות והתאמנו מטבע. שאר הפרטים נשאר כפי שהודפסו אז. ליאור, דורון ואלון יצאו לקניות עם הנשים שלהם אוסנת, תמר ואיילת. שימו לב! הסדר שלפניו מנינו את הנשים איננו דווקא הסדר של הגברים שלהם הן נשואות. מספר החפצים שכל אדם, הן הגברים והן הנשים, קנה, שווה למספר השקלים שהוא שילם עבור כל חפץ. כל גבר הוציא 63 ש"ח יותר מאשתו. ליאור קנה 23 חפצים יותר מתמר, ודורון קנה 11 חפצים יותר מאוסנת. מה היה שם אשתו של כל אחד מהגברים?

כדי לפתור בעיה זו נשתמש בנוסחה $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ ואומנם: מספר השקלים שהוציא כל אדם, הן גבר והן אישה, מוכרח להיות ריבוע של מספר שלם. כי אם האדם קנה x חפצים, הרי לפי הנתון הוא שילם עבור כל חפץ x ש"ח. מכאן שהוא הוציא בסך הכל x^2 ש"ח. נניח שגבר מסוים הוציא g^2 ש"ח ואשתו הוציאה w^2 ש"ח, הרי לפי הנתון $g^2 - w^2 = 63$ כלומר $(g + w) \cdot (g - w) = 63$. הפירוקים האפשריים של 63 לשני גורמים הם: 9×7 ; 21×3 ; 63×1 .

לכן האפשרויות הן: (1) $g + w = 63$ ו- $g - w = 1$ כלומר: $g = 32$ ו- $w = 31$,
או (2) $g + w = 21$ ו- $g - w = 3$ כלומר: $g = 12$ ו- $w = 9$,
או (3) $g + w = 9$ ו- $g - w = 7$ כלומר: $g = 8$ ו- $w = 1$.

כאשר נשווה את התוצאות האלה עם הנתונים הנוספים נקבל מיד כי הכרחי שליאור קנה 32 חפצים והוציא $32^2 = 1024$ ש"ח ולכן תמר קנתה $32 - 23 = 9$ חפצים והוציאה $9^2 = 81$ ש"ח. כמו כן ברור שדורון קנה 12 חפצים והוציא $12^2 = 144$ ש"ח ואוסנת קנתה חפץ אחד ($12 - 1 = 11$) והוציאה שקל אחד. לכן נשאר להניח שאלון קנה 8 חפצים והוציא $8^2 = 64$ ש"ח ואיילת קנתה 31 חפצים והוציאה $31^2 = 961$ ש"ח.

על-סמך הידיעה שכל גבר הוציא 63 ש"ח יותר מאשתו, ברור כי ליאור נשוי לאיילת, דורון נשוי לתמר ואלון נשוי לאוסנת.