

הנושא: **על בעייה פתוחה**

הוכן ע"י: שמואל אביטל.

תקציר: בחומר מוצגות השערות של המתמטיקאי הצרפתי קטלן הקשורה להפרש בין שתי חזקות שבסיסן הם מספרים עוקבים.

מילות מפתח: היסטוריה של המתמטיקה, קטלן, רבינו לוי בן גרשון, רלב"ג, אוילר, בעיה פתוחה, השערה, חזקה, חזקות.

החומר הוגש במסגרת: גליונות לחשבון מס' 56, אדר תשל"ט.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: עמוד אחד.

על בעייה פתוחה

בעיה פתוחה במתמטיקה היא בעיה שפתרונה אינו ידוע, אף על פי שמתמטיקאים רבים השקיעו מאמצים לפותרה. נביא עתה בעיה, בתורת המספרים, אשר פתוחה עד היום.

$$3^2 - 2^3 = 1$$

האם ישנן דוגמאות נוספות כאלה?

כפי שמראה הציור, המספרים $3^2 = 9$ ו- $2^3 = 8$ הם שני מספרים טבעיים עוקבים, שכל אחד מהם הוא חזקה שבסיסה מספר טבעי ומעריכה מספר טבעי השונה מ-1.

נשאלת השאלה: האם פרט לשנים אלה ישנו זוג אחר של מספרים טבעיים עוקבים בעלי תכונה כזאת שכל אחד מהם יהיה חזקה בעלת בסיס טבעי ומעריך טבעי, השונה מ-1?

בשנת 1844 ניסח המתמטיקאי הצרפתי קטלן (Catalan) את ההשערה שלא ייתכן זוג נוסף של מספרים עוקבים בעלי תכונה דומה. במילים אחרות: ההשערה היא שפרט ל- $n = 8$ לא ייתכן כי גם המספר הטבעי n , וגם עוקבו $n + 1$, יהיו חזקות שבסיסן מספר טבעי ומעריכן מספר טבעי, השונה מ-1.

אפשר לנסח את השערת קטלן גם בצורה נוספת:

השערה: אם $a^x - b^y = 1$,
כאשר a, b, x, y מספרים טבעיים
 $y \neq 1, x \neq 1$,
הרי $a = 3, b = 2, x = 2, y = 3$???

מעניין שהשערה זאת צמחה מסדרה של משפטים שמתמטיקאים שונים הוכיחו אותם בזה אחר זה. התחיל בדבר רבינו לוי בן גרשון (רלב"ג), שחי בדרום צרפת בשנים 1288-1344. הרלב"ג היה מתמטיקאי ואסטרונום מפורסם בדורו, וכתב פירושים לתורה ולחלקים מנביאים כתובים. בספרו **ספר מעשה חושב**, הנקרא גם **ספר המספר**, מוכיח רלב"ג כי אם $3^x - 2^y = 1$, הרי: או $x = y = 1$, או $x = 2$ ו- $y = 3$. הוא גם מראה שאם $3^x - 2^y = -1$ הרי $x = 1$ ו- $y = 2$. אחריו הוכיח אוילר (Leonhard Euler, 1707-1783) כי אם $a^2 - b^3 = 1$, כאשר a ו- b טבעיים, הרי $b = 2, a = 3$.

מתמטיקאים שונים גילו פרטים נוספים על בעיה זו. אבל ההשערה הכוללת, כפי שניסח אותה קטלן, נשארה פתוחה עד היום.

והנה פרט אחד שכל אחד יכול להוכיח כבר היום: לא ייתכן שיהיו ארבעה מספרים טבעיים עוקבים אשר כל אחד מהם הוא חזקה של בסיס טבעי עם מעריך טבעי השונה מ-1. הרואים אתם מדוע זה נכון?