"קשר חם" : לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: "מדוע לא כדאי להגדיר $(2 , 3) \cdot (3 , 2) = (6 , 6)$ או $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{7}$?"

הוכן ע"י: אביבה ברש.

תקציר: בחומר מובאת חקירה של מערכות מספרים שונות (מרוכבים, רציונליים, וכו'), ובניית מערכות אנלוגיות בעלות הגדרה שונה של אחת הפעולות. חקירת התכונות המתמטיות המתקיימות במערכות אלה מגבירה את המודעות של התלמידים לתפקיד ההגדרות במערכות מספרים ומביאה להבנה עמוקה ולהתנסות בהיבט היצירתי של המתמטיקה.

מילות מפתח: שיטות וגישות הוראה, שיטת חקר, קבוצות מספרים, מספרים מרוכבים, מספרים רציונליים, פעולות חשבון, רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות, איבר יחידה, איבר הופכי, חוק חילוף, חוק קיבוץ, חוק פילוג, סגירות, חיבור, כפל, שבר.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חם", הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה, שנה"ל תשנ"ה, אפריל 1995.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

מדוע לא כדאי להגדיר $(6,6)=(3,2)\cdot(2,3)$ או $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}=\frac{5}{7}$?

חקירה נוספת של מערכת מספרים מוכרת, יכולה להבהיר לתלמידים מושגים אליהם לא היו מודעים קודם לכן, להביא להבנה עמוקה יותר של המערכת עצמה ולהתנסות בהיבט היצירתי של המתמטיקה.
ננסה בחקירתנו להגביר את מודעות התלמידים לתפקיד ההגדרות במערכת המספרים. החקירה המוצעת יכולה להתאים לתלמידים מתעניינים, במסגרת לימודי העשרה או ללימוד יחידני.

תחילה נחקור וניצור מערכת אנלוגית למערכת המספרים המרוכבים. תוך כדי חקירה ננסה לבסס את הידע הקיים וכן לעסוק במושגים הקשורים למערכת המרוכבים, שאולי לא היינו מודעים אליהם קודם לכן. בדומה, נוכל לפתח גישה חדשה למספרים הרציונליים.

1. מערכת אנלוגית למערכת המספרים המרוכבים

בהגדרת מערכת המספרים המרוכבים, אנו מגדירים: מספר מרוכב, שיוויון בין שני מספרים מרוכבים וכן שתי פעולות: חיבור וכפל. ההגדרות המתאימות הן:

א. מספר מרוכב הוא זוג סדור (a , b) של שני מספרים ממשיים a ו - b.
ב. הגדרת השיוויון: $b = d$ וגם $a = c$ $\Leftrightarrow$ $(a , b) = (c , d)$.
ג. פעולת החיבור: $(a , b) + (c , d) = (a+c , b+d)$.
ד. פעולת הכפל: $(a , b) \cdot (c , d) = (ac-bd , ad+bc)$.

פעולת הכפל מוגדרת בצורה מאוד לא "טבעית". ננסה להגדיר מחדש את פעולת הכפל במערכת אלטרנטיבית, ולבדוק מה קורה בה.

נגדיר כפל באופן "טבעי": $(a , b) \cdot (c , d) = (ac , bd)$.
על פי הגדרת השיוויון ברור כי הכפל בלתי תלוי במייצגים ולכן מוגדר היטב. קיימות סגירות וקיימים חוק החילוף וחוק הקיבוץ.
$(1,0)$ הוא איבר היחידה של הכפל במערכת המקורית. מהו איבר היחידה של הכפל במערכת החדשה?

$$(a , b) \cdot (x , y) = (a , b)$$

לפי ההגדרה החדשה של הכפל: $(a , b) \cdot (x , y) = (ax , by)$

ולפי הדרישה לאיבר יחידה: $(ax , by) = (a , b) \Leftarrow (x , y) = (1 , 1)$

נבדוק מה יהיה האיבר ההפכי לאיבר (a , b).
(x , y) הפכי ל - (a , b) אם $(a , b) \cdot (x , y) = (1 , 1)$ (קיום חוק החילוף מאפשר ניסוח התנאי כחד-צדדי). תנאי זה מתקיים עבור $(x , y) = \left(\frac{1}{a},\frac{1}{b}\right)$ כאשר $a , b \neq 0$. כלומר גם האיבר ההפכי מתקבל בצורה הרבה יותר טבעית מהמקובל. בדיקה מתאימה תראה גם שהחילוק (כפעולה הפוכה לכפל) כמוהו ככפל בהפכי.

אם כך מדוע לא נשתמש במערכת החדשה, היותר "טבעית"?
ההגדרה החדשה גורמת לבעיה בעצם הגדרת איבר הפכי. לכל המספרים מהצורה $(a , 0)$ או $(0 , b)$ אין איבר הפכי. כמו כן אין תוצאה חד-משמעית למנת החילוק של שני מספרים מהצורה $(a , 0)$, כי: $(x,y)=\left(\frac{a}{b},k\right)$ לכל k ממשי $\Leftarrow (a,0)=(b,0)\cdot(x,y) \Leftarrow \frac{(a,0)}{(b,0)}=(x,y)$

רק בחירה של $k = 0$ תאפשר את בחירת המספרים מהצורה $(a , 0)$ כמייצגי המספרים הממשיים ומעבר לצורת הרישום המקובלת: $z = (a , b) = a\ (1 , 0) + b\ (0 ,1) = a + bi$.

ההגדרה החדשה גורמת גם לבעיה בבואנו להכיל את חוק הפילוג המורחב על המספרים המרוכבים שלנו: $(a+bi)\cdot(c+di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac - bd + (ad+bc)\,i$

או בכתיב המקורי: $(a , b)\cdot(c , d) = (ac\text{-}bd , ad+bc)$. בסתירה להגדרתנו את הכפל: (ac,bd).
עתה גם ברור מדוע הוגדר הכפל במערכת המקובלת, בצורה כל כך לא טבעית. שכן על פי הגדרה זו נפתרות בעיות שהועלו במערכת האלטרנטיבית.

2. מערכת אנלוגית למערכת המספרים הרציונליים

חקירה דומה נוכל לעשות גם במערכת המספרים הרציונליים.
ההגדרה הפחות טבעית במערכת המספרים הרציונליים היא זו של פעולת החיבור. באופן טבעי נרצה לחבר מונה עם מונה, ומכנה עם מכנה: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$
פעולת חיבור זאת מקיימת את תכונת הסגירות. אולם אין אנו מגדירים כך את החיבור שכן חיבור זה תלוי במייצגים, כלומר אינו פעולה מוגדרת היטב. לדוגמה: $\frac{1}{2}+\frac{2}{3}=\frac{1+2}{2+3}=\frac{3}{5}$

ואילו בבחירה של מייצגים אחרים ל- $\frac{2}{3}$ ול- $\frac{1}{2}$ נקבל: $\frac{3}{6}+\frac{4}{6}=\frac{3+4}{6+6}=\frac{7}{12}$

ו- $\frac{3}{5}$ אינו שווה ל- $\frac{7}{12}$.
"תיקון" קטן של הגדרת השיווין יוכל אולי לעזור לנו במקרה זה. נבחר בהגדרה אלטרנטיבית לשיוויון של שני מספרים רציונליים ונגדיר: $a + d = b + c \;\Leftrightarrow\; \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

בהתאם להגדרה החדשה של השיוויון נבחר את $\frac{3}{4}$ ו- $\frac{5}{6}$ כמייצגים אחרים של $\frac{2}{3}$ ו- $\frac{1}{2}$ בהתאמה.

$\frac{2}{3}=\frac{3}{4}$ כי $3 + 3 = 4 + 2$ ואילו $\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$ כי $5 + 2 = 6 + 1$.

לפי ההגדרה החדשה של החיבור: $\frac{2}{3}+\frac{1}{2}=\frac{3}{5}$

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{6}=\frac{8}{10}$$

ואכן: $\frac{8}{10}=\frac{3}{5}$ לפי ההגדרה החדשה, כי $8 + 5 = 10 + 3$.

ובאופן כללי: אם $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$ ו- $\frac{c_1}{d_1}=\frac{c}{d}$ אז: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a_1}{b_1}+\frac{c_1}{d_1}$

כי: $b+d+a_1+c_1 = a+c+b_1+d_1$ על פי ההגדרה החדשה של השיוויון.
כלומר, גם הגדרנו חיבור רציונליים בצורה יותר טבעית וגם בדקנו כי החיבור מוגדר היטב. נותר לנו לבדוק אם על פי ההגדרה החדשה השיוויון מקיים את הדרישות של יחס שקילות. במילים אחרות, יש לבדוק שלוש תכונות: רפלקסיביות, סימטריה וטרנזיטיביות. בהוכחת התכונות נסתמך על חוקים הקיימים במערכת המספרים הממשיים.

רפלקסיביות: $\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$ כי $a + b = b + a$

סימטריה: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$ כי $c + d = d + a \;\Leftrightarrow\; a + d = b + c$

טרנזיטיביות: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ וגם $\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$
כי מן הנתון וההגדרה האלטרנטיבית של יחס השיוויון נובע:

$a+d = b+c$ וגם $c+f = d+e \Rightarrow a+d+c+f = b+c+d+e \Rightarrow a+f = b+e$

בשלב זה נבדוק אם כפל מספרים רציונליים בהגדרתו המקובלת הוא פעולה מוגדרת היטב או נגדיר כפל אלטרנטיבי. כמו כן ניתן לבדוק את קיום חוקי החילוף והקיבוץ ואת קיום איבר היחידה לכל אחת מהפעולות שהוגדרו במערכת החדשה.

3. סיכום והערות

חקירה כפי שהוצעה לעיל מעודדת תלמידים לחשוב, לחקור, להיות יצירתיים וכן לעקוב אחרי התפתחויות של מערכות מתמטיות. באופן דומה ניתן גם לעודד תלמידים לשאול ולחקור בעיות מתמטיות כאשר הם משנים את אחד התנאים הנתונים.
לדוגמה: נניח שהוכחנו את משפט פיתגורס. נוכל לשאול לדוגמה:
א. ואם המשולש אינו ישר זווית?
ב. ואם נבנה על צלעות משולש ישר זווית מלבנים? או משולשים? או מצולעים אחרים?
או אף חצאי עיגולים?
ג. האם קיים משפט פיתגורס תלת-מימדי?

כאן התלמיד שואל "?What if not" כדי להציג בעיות חדשות לחקירה מתוך משפט מתמטי שהוכח בתנאים מסויימים. דרך נוספת להעלות בעיות לחקירה ולעודד חשיבה היא בדיקת מקרים מיוחדים ותנאים לקיומם.
לדוגמה, צמצום שבר באופן הבא:
$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4}=\frac{1}{4}$ מתקבל כנכון. גם $\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}$ נכון ומתקבל באותו האופן (שגוי). ניתן כמובן לשאול: עבור אילו מקרים ניתן "לצמצם" בשיטה הנ"ל ולקבל פתרון נכון?

ועוד דוגמה לחקירה מסוג זה:
כולנו מכירים את חוק הפילוג של הכפל מעל החיבור ופועלים לפיו: $a(b+c) = ab+ac$.
דני שכח את הכלל וכשניסה לשחזר אותו התבלבל והחליף כל פעולת חיבור בפעולת כפל ולהיפך.
חוק הפילוג של דני נראה כך: $a+bc = (a+b)\cdot(a+c)$.
ולראיה חישב ובדק דני: $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ ומצא כי החישוב נכון. נשאל כמובן,
עבור אילו ערכים של a , b, c קיים חוק הפילוג של דני?
(חוק פילוג כזה נכון באלגברה בוליאנית או עבור פעולות בין קבוצות כאשר הכפל מסמל פעולת חיתוך בין קבוצות וחיבור מסמל פעולת איחוד בין קבוצות).

מעורבות בפעולות חקר כאלה מהווה לתלמיד המתעניין, הזדמנות לראות במתמטיקה פעילות אנושית יצירתית ולהיות מעורב בתהליך של התפתחות מערכת מתמטית.

<u>מקורות</u>:

1. Brown, S.I. & Walter, M.I (1990). *The Art of Problem Posing.* Hillsdale NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

2. Johnson, E. *Algebraic and Numerical Explorations Inspired by the Simplification: $1\cancel{6}/\cancel{6}4=1/4$.* Focus on Learning Problems in Mathematics, Vol. 7, No. 3 & 4, pp. 15-28.

3. Scott, M.P (1987). *Understanding Rational Numbers.* Mathematics Teacher, pp. 518-521.