הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״**קשר-חם**״: ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

נושא: **חקירת משוואות פרמטריות בעזרת גרפים**

הוכן ע״י: אביבה ברש.

תקציר: בחומר מוצגת דרך לחקירת משוואות ריבועיות פרמטריות על ידי שימוש בהצגה גרפית של הפרמטר כפונקציה של x, וחקירת המצב ההדדי בין שני גרפים. לצורך שרטוט הגרפים ניתן להשתמש בתכנת מחשב.

מילות מפתח: אלגברה, משוואה ריבועית, משוואה פרמטרית, שורשי משוואה, פתרון גרפי, פונקציה ממעלה שניה, פונקציה ריבועית, פרבולה, מחשב.

החומר הוגש במסגרת: ״קשר-חם״ בחיפה, סדנא ראשונה בשנה״ל תשנ״ד, נובמבר 1993
״קשר-חם״ בתל-אביב, סדנא שניה בשנה״ל תשנ״ד, ינואר 1994
״קשר-חם״ בבאר-שבע, סדנא שלישית בשנה״ל תשנ״ד, פברואר 1994

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 7 עמודים.

חקירת משוואות פרמטריות בעזרת גרפים

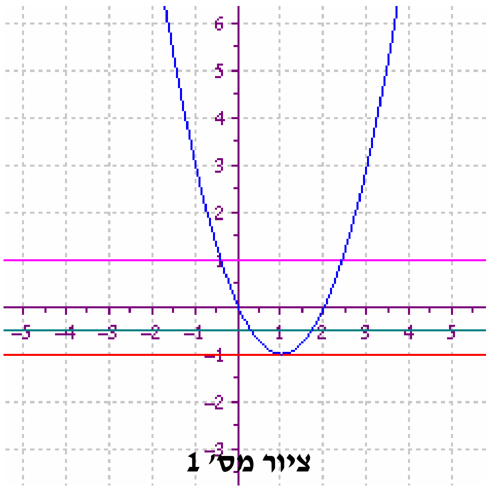
השימוש בסמלים ובסימנים אלגבריים הוא אחד המקורות לקשיים של תלמידים בלימוד האלגברה. הדבר בא לידי ביטוי, למשל, בחקירת משוואות ואי שוויונים, בפרט כשהם נתונים בהצגה פרמטרית.
בניסיון להקל על התלמיד בהתמודדות עם סמלים ומושגים מופשטים, אנו משתמשים לעיתים בייצוג גרפי.
הצגת בעיה בדרך גרפית, היא ויזואלית, קונקרטית, מקלה על התלמיד את החקירה של הבעיה ועוזרת למציאת הפתרון הנדרש.
להלן ניישם את האסטרטגיה של הצגת בעיה בדרך גרפית, לפתרון בעיות פרמטריות.
על הקושי הטכני העלול להתלוות לייצוג גרפי של בעיה, ניתן להתגבר ע״י שימוש בתכנת מחשב (או מחשבון גרפי), שבעזרתה מבצעים את השרטוט.

בעיה מס' 1

עבור אליו ערכים של פרמטר m יש למשוואה $x^2 - 2x - m = 0$.
א. שורש ממשי אחד?
ב. שני שורשים ממשיים שונים?
ג. שני שורשים ממשיים שוני סימן?
ד. שני שורשים ממשיים חיוביים?

פתרון

מהמשוואה הנתונה נובע ש- $m = x^2 - 2x$. נשרטט את הפונקציה $m(x) = x^2 - 2x$. (ר' ציור מס' 1).



ציור מס' 1

ונשאל עתה: מהו ערכו של m כאשר יש:
א. ערך יחיד של x?
ב. שני ערכים שונים של x?
ג. שני ערכים שוני סימן?
ד. שני ערכים חיוביים של x?

הערה: אפשר להתייחס גם אל חיתוך שתי הפונקציות: $y = x^2 - 2x$, $y = m$.
היות וקדקוד הפרבולה שהתקבלה הוא בנקודה $(1,-1)$, נשרטט את הישר $m = -1$, ונוכל לקרוא מתוך הגרף את האינפורמציה הבאה:
א. לישר $m = -1$ יש נקודה משותפת אחת עם הפרבולה. לכן עבור $m = -1$ למשוואה יש שורש ממשי אחד.
ב. עבור $m > -1$ (לדוגמא, בציור מס' 1, הישרים $m = -0.5$ ו- $m = 1$), לישר $y = m$ יש שתי נקודות חיתוך עם הפרבולה $y = x^2 - 2x$. לכן, עבור $m > -1$ למשוואה יש שני שורשים ממשיים.

ג. עבור $m > 0$ (לדוגמא, בציור מס׳ 1, הישר $m = 1$), נקודות החיתוך של $y = m$ ו- $y = x^2 - 2x$ נמצאות משני צידי ציר ה- x. לכן עבור $m > 0$, לשני השורשים של המשוואה סימנים שונים.

ד. עבור $-1 < m < 0$ (לדוגמא, בציור מס׳ 1, הישר $m = -0.5$), נקודות החיתוך של $y = m$ ו- $y = x^2 - 2x$ נמצאות מימין לציר ה- x (כלומר, מתקבלים ערכים חיוביים).
לכן, עבור $-1 < m < 0$ שני שורשי המשוואה חיוביים.

בעיה מס׳ 2

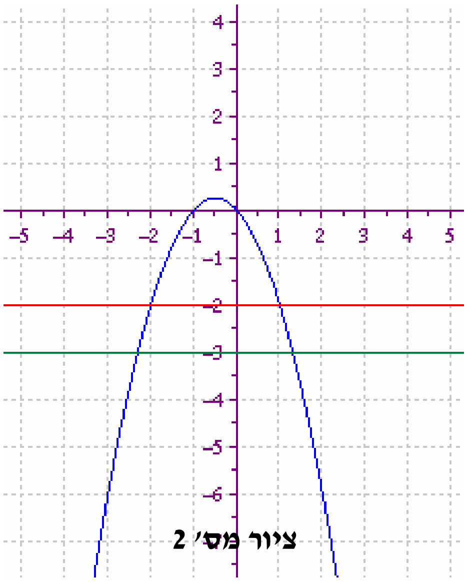
עבור אילו ערכים של הפרמטר k יהיה למשוואה: $x^2 + x + k = 0$ שורש אחד קטן מ- 1 ושורש שני גדול מ- 1?

פתרון

מהמשוואה הנתונה נובע ש: $k = -x^2 - x$. נשרטט את הפונקציה: $k(x) = -x^2 - x$ (ר׳ ציור מס׳ 2).

נמצא את הערך של k המתקבל עבור $x = 1$. נציב ונקבל: $k(1) = -1^2 - 1 = -2$.

נשרטט את הישר $k = -2$ (ר׳ ציור מס׳ 2).



ציור מס׳ 2

מציור מס׳ 2 אנו למדים שעבור $k < -2$ (לדוגמא, בציור מס׳ 2, הישר $k = -3$), מתקבלות שתי נקודות חיתוך בין $y = k$ לבין $y = -x^2 - x$, כך שנקודה אחת נמצאת מימין לישר $x = 1$ ונקודה שניה נמצאת משמאל לישר $x = 1$. לכן, עבור $k < -2$, למשוואה הנתונה יש שורש אחד הגדול מ- 1 ושורש שני הקטן מ- 1.

בעיה מס' 3

נתונה המשוואה: $x^2 - mx + m + 3 = 0$, ששורשיה הם α ו- β.

א. עבור אילו ערכים של m מתקיים: $\beta < 3 < \alpha$?

ב. עבור אילו ערכים של m שורשי המשוואה הם שוני סימן?

ג. נתון כי למשוואה שורש יחיד כאשר $m = -2$ או $m = 6$.
עבור אילו ערכים של m יש למשוואה שני שורשים שווי סימן?

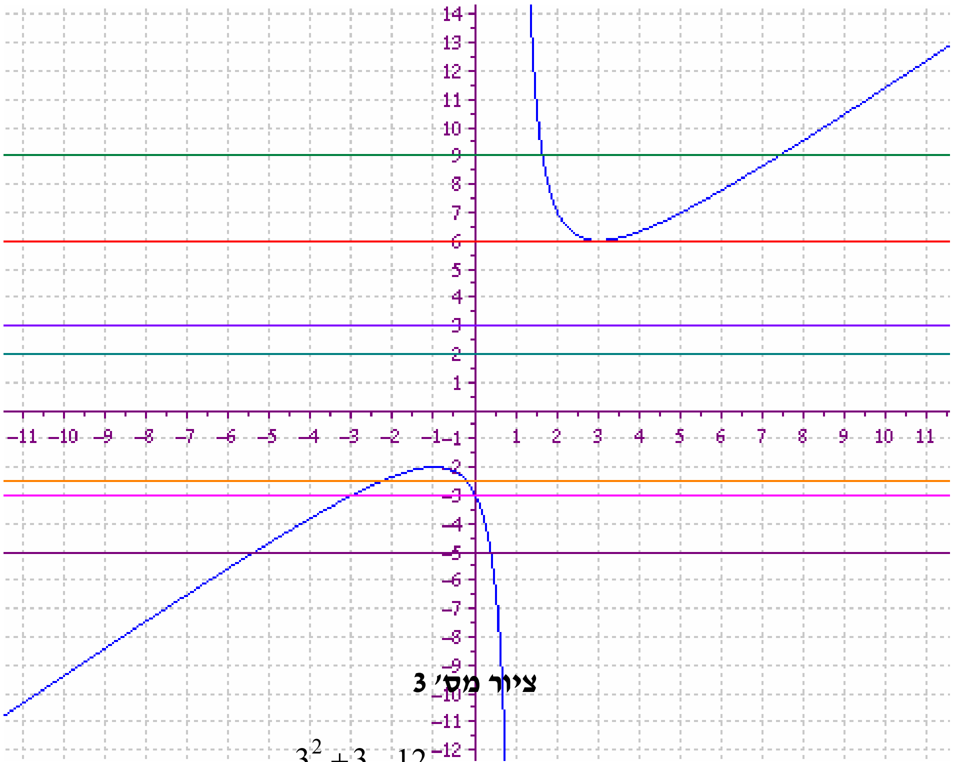
ד. עבור אילו ערכים של m אין פתרון למשוואה?

פתרון

נרשום שוב את m כפונקציה של x.

את המשוואה הנתונה: $x^2 - mx + m + 3 = 0$ ניתן לרשום כך: $x^2 - (x - 1)m + 3 = 0$

או $(x \neq 1)$ $m = \frac{x^2+3}{x-1}$. נשרטט את הפונקציה: $m(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$ (ר' ציור מס' 3).



ציור מס' 3

א. נמצא את הערך של m המתקבל עבור $x = 3$: $m = \frac{3^2+3}{3-1} = \frac{12}{2} = 6$, ונשרטט את הישר $m = 6$

(ר' ציור מס' 3). ניתן לראות שלישרים $m = m_0$, שעבורם כאשר $m_0 > 6$ (לדוגמא, בציור מס' 3 הישר $m = 9$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $m = \frac{x^2+3}{x-1}$, כך שאחת מהן נמצאת מימין לישר $x = 3$ והשניה משמאלו. לכן, עבור $m > 6$ שורש אחד של המשוואה גדול מ- 3 והשורש השני שלה קטן מ- 3.

ב. נמצא את הערך של m המתקבל עבור $x = 0$: $m = \frac{0^2+3}{0-1} = -3$, ונשרטט את הישר $m = -3$

(ר' ציור מס' 3). ניתן לראות שלישרים $m = m_0$, עבורם $m_0 < -3$ (לדוגמא, בציור מס' 3, הישר $m = -5$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $m = \frac{x^2+3}{x-1}$, כך שאחת מהן נמצאת

בחלק הימני (החיובי) של ציר ה- x והשניה נמצאת בחלק השמאלי (השלילי) של ציר ה- x.
לכן, עבור $m < -3$, הסימנים של שורשי המשוואה שונים.

ג. לישרים $m = m_o$, עבורם $m_0 > 6$ (לדוגמא, בציור מס' 3, הישר $m = 9$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $m = \frac{x^2+3}{x-1}$, שתיהן נמצאות בחלק הימני (החיובי) של ציר ה- x.
לכן, עבור $m > 6$ שני שורשי המשוואה חיוביים.
לישרים $m = m_0$, עבורם $-3 < m_0 < -2$ (לדוגמא, בציור מס' 3, הישר $m = -2.5$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $m = \frac{x^2+3}{x-1}$, שתיהן נמצאות בחלק השמאלי (השלילי) של ציר ה- x . לכן עבור $-3 < m < -2$ שני שורשי המשוואה שליליים.

ד. לישרים $m = m_0$, כאשר $-2 < m_0 < 6$ (לדוגמא, בציור מס' 3, הישרים $m = 2$, $m = 3$), אין נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $m = \frac{x^2+3}{x-1}$.
לכן, עבור $-2 < m < 6$ למשוואה אין שורשים ממשיים.

בעיה מס' 4

x_1, x_2 הם שורשי המשוואה: $x^2 - bx + 1 = 0$. עבור אילו ערכים של b:

א. שני השורשים גדולים מ- 1?

ב. $x_1 < b < x_2$?

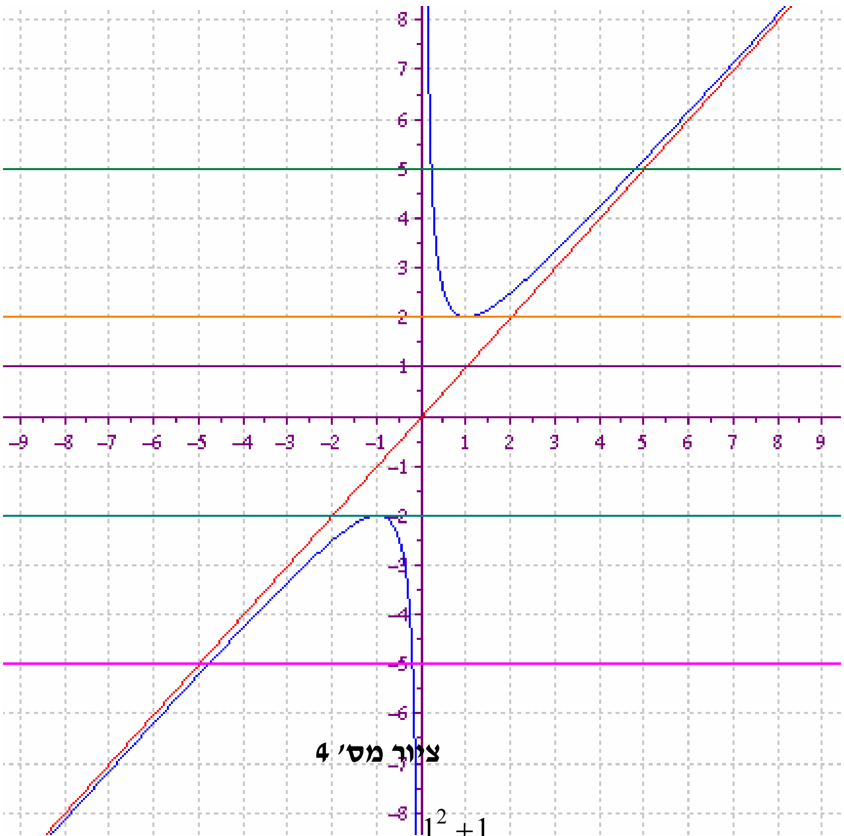
ג. $x_1 < x_2 < b$?

ד. $b < x_1 < x_2$?

פתרון

מהמשוואה הנתונה מקבלים: $b = \frac{x^2+1}{x}, (x \neq 0)$.

נשרטט את הפונקציה $b(x) = \frac{x^2+1}{x}$ (ר' ציור מס' 4).



ציור מס' 4

א. נציב בפונקציה $x = 1$ ונקבל: $b = \frac{1^2+1}{1} = 2$. נשרטט את הישר $b = 2$ (ר' ציור מס' 4).

לישרים $b = b_0$, עבור $b_0 > 2$ (לדוגמא, בציור מס' 4, הישר $b = 5$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $b = \frac{x^2+1}{x}$. שתיהן אמנם חיוביות, אבל ערך ה- x של אחת מן הנקודות גדול מ- 1, וערך ה- x של הנקודה השניה קטן מ- 1.

לכן, עבור $b > 2$ לא מתקיימים תנאי השאלה.

הישרים $b = b_0$, עבור $b_0 < 2$, או שאינם חותכים את גרף הפונקציה $b = \frac{x^2+1}{x}$ (לדוגמא, בציור מס' 4, הישר $b = 1$) או שהם חותכים את הגרף של פונקציה זו בשתי נקודות שעבורם ערכי ה- x שליליים (לדוגמא, בציור מס' 4, הישר $b = -5$).

לכן, לא קיים ערך של b שעבורו שני שורשי המשוואה גדולים מ- 1.

כדי לפתור את סעיפים ב׳-ד׳ נעזר בכללים הבאים :

1. אם נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $b = f(x)$ עם הישר $b = b_0$ נמצאת מעל לישר $b = x$, אז שורש המשוואה $f(x) = b_0$ קטן מ- b_0.
2. אם נקודת החיתוך של גרף הפונקציה $b = f(x)$ עם ישר $b = b_0$ נמצאת מתחת לישר $b = x$, אז שורש המשוואה $f(x) = b_0$ גדול מ- b_0.

לכן, נשרטט את הישר $b = x$ (ר׳ ציור מס׳ 4). ישר זה הוא אסימפטוטה של גרף הפונקציה :
$b(x) = \frac{x^2+1}{x}$ (ניתן גם להיווכח כי למשוואה $x = \frac{x^2+1}{x}$ אין פתרון).

ב. הענף הימני של גרף הפונקציה נמצא כולו מעל לישר $b = x$, ולכן עבור הענף הימני מתקיים תמיד : $x_1 < b$, $x_2 < b$.
הענף השמאלי של גרף הפונקציה נמצא כולו מתחת לישר $b = x$, ולכן עבור הענף השמאלי מתקיים תמיד : $x_1 > b$, $x_2 > b$.
לכן, אין אף ערך של b שעבורו מתקיים : $x_1 < b < x_2$.

ג. לישרים $b = b_0$ עבורם $b > 2$ (לדוגמא, בציור מס׳ 4, הישר $b = 5$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $b = \frac{x^2+1}{x}$, הנמצאות מעל לישר $b = x$.
לכן, עבור $b > 2$ מתקיים $x_1 < x_2 < b$.

ד. לישרים $b = b_0$ עבורם $b < -2$ (לדוגמא, בציור מס׳ 4, הישר $b = -5$), יש שתי נקודות חיתוך עם גרף הפונקציה $b = \frac{x^2+1}{x}$, הנמצאות מתחת לישר $b = x$.
לכן, עבור $b < -2$ מתקיים $b < x_1 < x_2$.

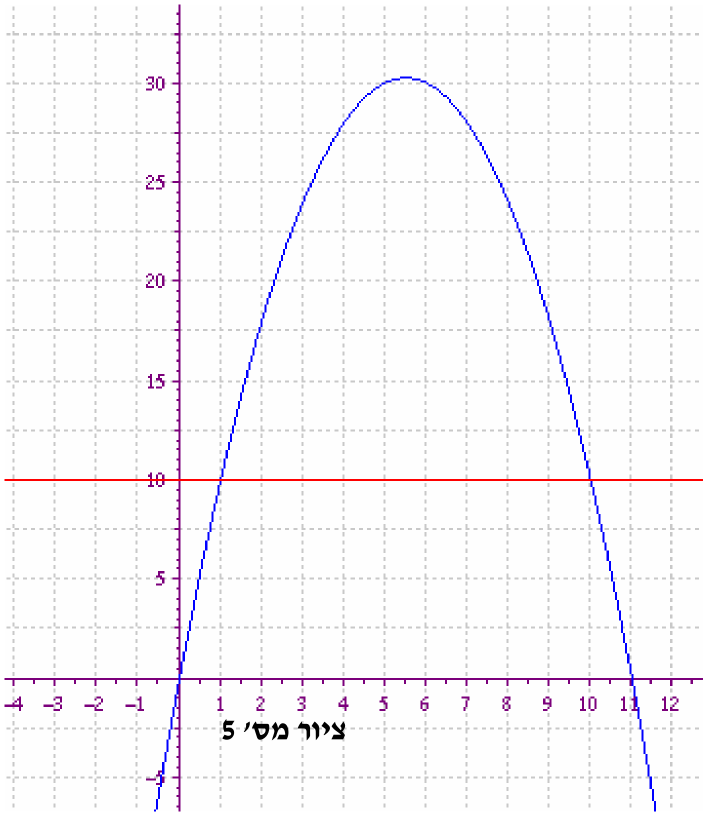
בעיה מס' 5

מה הערך של c עבורו אחד משורשי המשוואה הריבועית $x^2 - 11x + c = 0$ גדול ב- 9 מהשורש האחר?

פתרון

מהמשוואה הנתונה מקבלים $c = -x^2 + 11x$.

נשרטט את גרף הפונקציה (הפרבולה): $c(x) = -x^2 + 11x$ (ר' ציור מס' 5)



ציור מס' 5

אנו מחפשים ישר המקביל לציר ה- x, אשר חותך את הפרבולה בשתי נקודות שעבורן $\Delta x = 9$.
במקרה זה הפתרון הוא אמפירי.

אם נעביר את הישר $c = 10$, נקבל שהשורשים של $-x^2 + 11x = 10$ הם $x_1 = 1$ ו- $x_2 = 10$, ובמקרה זה שורש אחד גדול ב- 9 מן השורש השני. לכן, הפתרון הוא: $c = 10$.