הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל
המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם" : לקידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

הנושא : **פתרון משוואות במהלך ההיסטוריה ויישומים להוראת מתמטיקה**

הוכן ע"י : רותי רייז.

תקציר : בחומר מובאת סקירה של האופן שבו פתרו משוואות במהלך ההיסטוריה של המתמטיקה.
קיימת התייחסות לפתרון משוואות במצרים, בבבל, ביוון, בהודו, בימי הביניים, במדינות ערב ובתקופה המודרנית.
מובאים פתרונות של משוואות בשיטת הניחוש, פתרון בדרך אלגברית, פתרון באמצעות גיאומטרית המישור, פתרון באמצעות גיאומטריה אנליטית, ופתרון באמצעות סדרות.
כמו כן קיימת התייחסות להיבט המעשי של פתרון משוואות, ולאופן שבו ניתן ליישם בהוראה את ההיבטים השונים של ההתפתחות ההיסטורית בפתרון משוואות.

מילות מפתח : היסטוריה של המתמטיקה, מצרים, בבל, יוון, ימי הביניים, ערב, תקופה מודרנית, כתב יתדות, כתב הירוגליפים, פפירוס רינד, דיופנטוס, אלכואריזמי, שיטת ההצבה השקרית, מספרים טבעיים, מספרים שליליים, מספרים שלמים, מספרים קומפלקסיים, אלגברה, תבנית פסוק, משוואה ממעלה ראשונה, משוואה ממעלה שניה, משוואה ריבועית, פתרונות ממשיים, פתרונות מרוכבים, משוואה דיופנטית, נוסחאות הכפל המקוצר, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, גיאומטריה אנליטית, שטח, היקף, דמיון משולשים, מעגל, חותך, משיק, מרחק בין נקודות, משפט פיתגורס, סדרה, סדרות, רקורסיה.

החומר הוגש במסגרת : בי"ס קיץ בנושא "שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה", שנה"ל תשס"ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 25 עמודים.

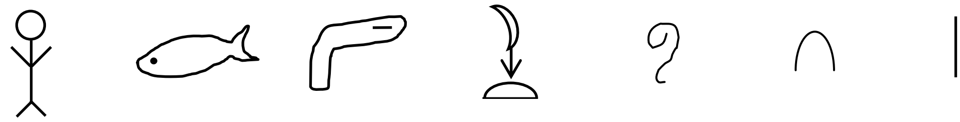
פתרון משוואות במהלך ההיסטוריה ויישומים להוראת מתמטיקה

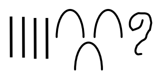
להלן יובא הרקע של כל אחת מן התקופות ההיסטוריות ותיאור נושא פתרון משוואות בתקופה זו.

פתרון משוואות במצרים

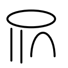
רקע

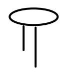
- המתמטיקה המצרית מתחילה משנת 4,000 לפנה״ס.
- הידע שלנו על התקופה המצרית בא מפפירוס רינד (Rhind), שמוצג כיום במוזיאון הבריטי בלונדון, ומפפירוס מוסקבה, שמוצג כיום במוזיאון לאומנות במוסקבה. פפירוסים אלה עשויים מעץ גומא, הגדל על גדות הנילוס. פפירוס רינד נקרא על שם אספן אנגלי בשם רינד שרכש אותו אך נכתב ע״י אדם בשם אַחְמֵס בשנת 1,650 לפנה״ס, כספר לימוד לתלמידיו. פפירוס רינד מכיל רק בעיות ממעלה ראשונה.
- האלגברה המצרית הייתה אלגברה רטורית. כלומר, הבעיות ופתרונן הוצגו באופן מילולי.
- הכתב המצרי היה כתב תמונתי/ציורי ונקרא כתב הִירוֹגְלִיפִים או כתב חרטומים. גם למספרים היו להם סמלים מיוחדים:

המספר	**1**	**10**	**100**	**1,000**	**10,000**	**100,000**	**1,000,000**
הסמל המצרי							
שם הסמל	מקל אנכי	עצם העקב	פקעת חוטים	פרח הלוטוס	אצבע מכוונת	דג (הזקן)	אדם מופתע

הכתיבה של המספרים הייתה מימין לשמאל. לדוגמא, המספר 134 נכתב כך: 

השברים המצריים היו שברי יחידה (שברים שהמונה שלהם אחד והמכנה שלהם מספר טבעי)

והם סומנו בכתב ההירוגליפי עם הסימן  מעל למכנה. לדוגמא, השבר $\frac{1}{12}$ נרשם כך: 

רק למספר $\frac{2}{3}$ היה סימון מיוחד:  .

סמלים אלה מעידים על כך ששיטת הספירה המצרית הייתה השיטה העשרונית.

הערה: המצרים כתבו גם בכתב הנקרא כתב היראטי שהוא שיפור מסוים של כתב ההירוגליפים. בכתב ההיראטי שבר סומן עם נקודה מעל למספר המייצג את המכנה.

- המצרים לא הכירו את שיטת הפוזיציה (שיטה שבה ערך הספרה נקבע לפי מיקומה). כמו כן, לא היה למצרים ייצוג לאפס.
- המצרים הכירו רק במספרים הרציונליים החיוביים (ולא בשליליים).
- למצרים היה סימון לפלוס ולמינוס. הפלוס יוצג על ידי זוג רגלים הצועדות מימין לשמאל - הכיוון הרגיל של הכתיבה המצרית, ואילו המינוס יוצג על ידי זוג רגלים הצועדות משמאל לימין.

פתרון משוואות

- המצרים ידעו לפתור משוואות ממעלה ראשונה ומשוואות פשוטות ממעלה שניה.
- המתמטיקה המצרית התפתחה בעיקר ככלי לשימוש מעשי – דבר שניתן לראות בבעיות שהם פתרו. למשל, בפפירוס רינד יש בעיות רבות העוסקות במזון.
- הדוגמאות שהמצרים הביאו היו דוגמאות מספריות בלבד.

דוגמא ראשונה: בעיה מספר 26 מפפירוס רינד: "כמות ועוד רבע ממנה נותנים 15. מהי הכמות?".

פתרון: המשוואה המתקבלת, בסימולים שלנו היא: $x+\frac{x}{4}=15$

המצרים פתרו את הבעיה בשיטה הנקראת "שיטת ההצבה השקרית" - False Position.
שיטה זו מבוססת על ניחוש ועיקרון היחס הישר. להלן תיאור השיטה (במונחים של זמננו): יש לנחש / להניח ערך מסוים עבור הפתרון. לאחר מכן, יש לבצע את הפעולות הניתנות בבעיה (באגף שמאל) עם ערך זה. לפי התוצאה המתקבלת להתאים את הערך ההתחלתי תוך שימוש בפרופורציה: לחשב פי כמה התשובה שצריכה להתקבל גדולה/קטנה מן התוצאה שהתקבלה (זהו "גורם התיקון"), ופי אותו מספר לכפול/לחלק את הניחוש ההתחלתי שלנו. המספר המתקבל הוא הפתרון המבוקש.

נפתור בשיטה זו את הבעיה הנתונה. נניח שהערך הוא 4 (נוח לחישוב בבעיה זו). פתרון הבעיה עם הערך 4 (הצבת הערך 4 באגף שמאל) נותן: $4+\frac{4}{4}=5$. קיבלנו שהכמות היא 5, במקום 15. לכן, התוצאה המבוקשת גדולה פי 3 מן הערך שקיבלנו. לכן צריך לכפול את הערך ההתחלתי פי 3 ונקבל: $4\cdot 3=12$. הערך 12 היא הכמות המבוקשת. בידקו זאת!

- נסו לפתור את הבעיה עם ערך התחלתי אחר. האם הפתרון המתקבל תלוי בניחוש ההתחלתי?
- נסו להוכיח מדוע שיטה זו נכונה לפתרון של כל משוואה לינארית.

להלן בעיות נוספות מפפירוס רינד. נסו לפתרן בשיטת ה- False Position:

1. בעיה 24 בפפירוס רינד: כאשר מוסיפים לכמות שביעית שלה, מקבלים 19. מהי הכמות?
2. בעיה 25 בפפירוס רינד: כאשר מוסיפים לכמות את מחציתה מקבלים 16. מהי הכמות?
3. בעיה 27 בפפירוס רינד: כאשר מוסיפים לכמות חמישית שלה, מקבלים 21. מהי הכמות?

דוגמא שניה: ריבוע ועוד ריבוע שמידותיו הם $\frac{1}{2}$ ועוד $\frac{1}{4}$ של הראשון הם ביחד 100. תן תשובה.

להלן ניסוח הפתרון: קח צלע 1. קח צלע $\frac{1}{2}$ ועוד $\frac{1}{4}$ של השני. כפול בעצמו. תקבל: $\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ ביחד $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$. חלק 1 ב- $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{16}$ ותקבל: $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{100}+\frac{1}{200}$. כפול התוצאה ב- 100 ותקבל: $64=\frac{1}{2}+1+\frac{1}{2}+12+50$. השורש 8.

פתרון משוואות בבבל

רקע

- המתמטיקה הבבלית החלה בשנת 3,000 לפנה״ס עד 300 לספירה.
- לבבלים הייתה שיטת פוזיציה לפי בסיס 60. שיטת בסיס זו נמצאת בשימוש עד היום במדידה של זמן (בכל שעה יש 60 דקות, בכל דקה יש 60 שניות וכו׳) ובמדידה של זוויות.
  לבבלים לא היה להם סימון לאפס, אך הם השאירו מקום ריק במקום אפס.
- הכתב הבבלי היה כתב יתדות. הבבלים כתבו על לוחות חימר. המספרים יוצגו באופן הבא:
  המספר 1 הוצג על ידי יתד אנכי:  והמספר 10 הוצג על ידי יתד 
  כל מספר אחר הוצג באמצעות יתדות אלו ותוך שימוש בשיטת הפוזיציה בבסיס 60.
  את השברים הם ייצגו בבסיס 60, אך לא היה להם סימון לשבר.
  במקרים מסוימים היה קושי להבחין האם במספר הכתוב הושאר מקום ריק (כמייצג אפס) או האם המספר הכתוב מייצג שבר. לכן, הקביעה מה מייצג המספר נקבעה לפי ההקשר בו הוא ניתן.
- האלגברה הבבלית הייתה אלגברה רטורית. כלומר, הבעיות ופתרונן הוצגו באופן מילולי.
- המתמטיקה הבבלית התפתחה בעיקר ככלי לשימוש מעשי. בעיות רבות מתקופה זו עוסקות בחישוב שטחים של קרקעות ובנפחי יבולים.
- הם פתרו בעיות באמצעות דוגמאות מספריות, ובפתרון לא הוצגו נימוקים ולא הסברים לדרך הפתרון.
- הבבלים הכירו רק במספרים הרציונליים החיוביים.

פתרון משוואות

הבבלים ידעו לפתור **משוואה ריבועית**, למרות שהם הכירו רק בשורש החיובי שלה.

<u>דוגמאות</u>:

א. יש לי ריבוע. חיברתי את שטחו ו- $\frac{2}{3}$ מהצלע שלו וקיבלתי 35 ; 0. מהי צלע הריבוע?

(הסימון ; משמש להפרדה בין החלק השלם לשבר).

ב. גודל שטח מסוים הוא 1,000 יחידות שטח. שטח זה הוא סכום שטחי שני ריבועים. אורך הצלע של אחד הריבועים הוא 10 יחידות פחות מ- $\frac{2}{3}$ אורך הצלע של הריבוע השני. מהם אורכי הצלעות של הריבועים?

ג. הסכום של שטח ריבוע ושל $\frac{4}{3}$ מצלעו הוא $\frac{11}{12}$. מהו אורך הצלע?

<u>הפתרון שנתנו הבבלים</u>: לוקחים חצי מ- $\frac{4}{3}$. מקבלים $\frac{2}{3}$; מעלים תוצאה זו בריבוע, מקבלים $\frac{4}{9}$; מוסיפים תוצאה זו ל- $\frac{11}{12}$, מקבלים $1\frac{13}{36}$. ערך זה הוא הריבוע של $\frac{7}{6}$. מחסרים $\frac{2}{3}$ מ- $\frac{7}{6}$, מקבלים $\frac{1}{2}$, וזוהי הצלע המבוקשת.

הסבר הפתרון של הבבלים, <u>בסימול אלגברי המקובל כיום</u>:

הפתרון של הבבלים	ההסבר בסימול המקובל כיום
<u>הבעיה</u>: הסכום של שטח ריבוע ושל $\frac{4}{3}$ מצלעו הוא $\frac{11}{12}$.	לפתור את המשוואה: $x^2+\frac{4}{3}x=\frac{11}{12}$
<u>פתרון</u>: א. לוקחים חצי מ- $\frac{4}{3}$. מקבלים $\frac{2}{3}$	א. $\frac{2}{3}=\frac{4}{3}:2$. למעשה, כתיבת המשוואה הנתונה בצורה: $x^2+\frac{2}{2}x+\frac{2}{3}x=\frac{11}{12}$
ב. מעלים תוצאה זו בריבוע, מקבלים $\frac{4}{9}$	ב. $\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$
ג. מוסיפים תוצאה זו ל- $\frac{11}{12}$, מקבלים $1\frac{13}{36}$	ג. $x^2+\frac{2}{2}x+\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{11}{12}+\left(\frac{2}{3}\right)^2$ כלומר: $x^2+2\cdot\frac{2}{3}x+\left(\frac{2}{3}\right)^2=1\frac{13}{36}$
ד. ערך זה הוא הריבוע של $\frac{7}{6}$	ד. $\left(x+\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{7}{6}\right)^2$
ה. מחסרים $\frac{2}{3}$ מ- $\frac{7}{6}$, מקבלים $\frac{1}{2}$, וזוהי הצלע המבוקשת.	ה. $x+\frac{2}{3}=\frac{7}{6}$ או: $x=\frac{7}{6}-\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$. (הם התייחסו רק לפתרון החיובי)

הבבלים נתנו הוראות, כדוגמת ההוראות שהופיעו בדוגמא הנ"ל, לפתרון של כל משוואה עם נתונים מספריים שונים. לא הייתה להם דרך כללית לפתרון. בנוסף, ההוראות לפתרון לא לוו בהסברים.

הבבלים הם הראשונים שפתרו משוואה ריבועית, באופן שאנו עושים עד היום, באמצעות השלמה לריבוע, למרות שהם התייחסו רק לפתרון החיובי. הם גם הציגו פתרון בדרך גיאומטרית – ר' בהמשך.

הבבלים ידעו לפתור **מערכת של שתי משוואות ליניאריות עם שני נעלמים**. הם פתרו את המערכת בשיטת ה- False Position שהוצגה לעיל (ר' פתרון משוואות במצרים).

הבבלים ידעו לפתור **מערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים, המובילה למשוואה ריבועית**.

<u>דוגמאות</u>:

א. כפלתי אורך ברוחב. התקבל שטח 252. חיברתי אורך ורוחב קיבלתי 32. מהו האורך ומהו הרוחב?

<u>הפתרון שנתנו הבבלים</u>: קח חצי של 32. את המספר שהתקבל כפול בעצמו. תחסיר מהתוצאה את השטח הנתון. קח שורש ריבועי. הוסף את התוצאה לחצי שקיבלת בהתחלה ותקבל את האורך. חסר את התוצאה מן החצי שקיבלת בהתחלה ותקבל את הרוחב.

הסבר הפתרון שנתנו הבבלים, <u>בסימול האלגברי המקובל כיום</u>: הבעיה מתייחסת לאורך ורוחב של מלבן. נסמן ב- x את רוחב המלבן וב- y את אורך המלבן. לפי נתוני הבעיה נקבל את מערכת המשוואות: $\begin{cases} xy = 252 \\ x + y = 32 \end{cases}$. ⇐ $y = 32-x$. נציב ונקבל: $x(32-x)=252$ ⇐ $x^2 - 32x + 252 = 0$

שפתרונה: $x_{1,2} = 16 \pm \sqrt{16^2 - 252}$. שלבי הפתרון שבפתרון הבבלי תואמים חישוב זה.

ב. אם מישהו יאמר לך: חבר את הצלע הקצרה ואת השטח [של מלבן] והתוצאה הייתה 54, והצלע הקצרה פלוס 2 שווה לצלע הארוכה, מהי הצלע?

<u>הפתרון שנתנו הבבלים</u>: אתה מחבר שתיים לאחד, כך שיש לך 3. עכשיו, אתה לוקח חצי, שנותן אחד וחצי, וכופל אותו בעצמו, כך שאתה מקבל שתיים ורבע. עתה, חבר לזה 54 ותקבל 56 ורבע. קח את השורש והחסר 1 וחצי. נשארו לך 6 וזוהי הצלע הקטנה. הוסף 2 ויש לך את הצלע הגדולה שהיא 8.

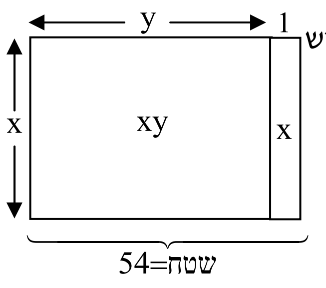
יתכן שהבבלים נעזרו בפתרון גיאומטרי, שיתואר להלן (בסימול שלנו), פתרון שהיה בוודאי ידוע לאלכואריזמי (ר' מתמטיקה ערבית בהמשך):

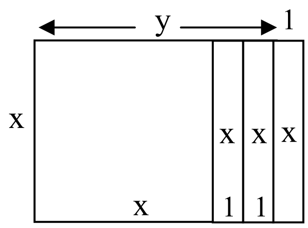
נסמן ב- x את הצלע הקצרה של המלבן וב- y את הצלע הארוכה של המלבן.

לפי נתוני הבעיה: "הצלע הקצרה פלוס 2 שווה לצלע הארוכה", כלומר: $y = x + 2$.

בבעיה כתוב "חבר את הצלע הקצרה ואת השטח של מלבן". היות ומדובר כאן בחיבור של יחידות מדידה לא זהות, משערים שהכוונה שלהם הייתה ליצור מלבן נוסף שאחת ממידותיו היא הצלע הקצרה של המלבן הנתון והצלע השניה היא 1. כך נקבל ששטח המלבן הנוסף שיצרנו הוא x יחידות שטח, כמספר יחידות האורך x של המלבן הנתון, אך אז יש משמעות לחיבור אותן יחידות מידה: מחברים את שטח המלבן הנתון עם שטח המלבן שיצרנו ומקבלים שטח כולל של 54.

באופן אלגברי: $x + xy = 54$. באופן גיאומטרי:

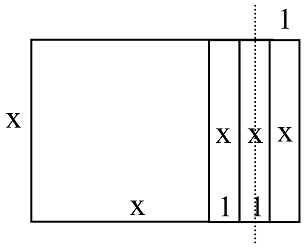




לפי הנתון: $y = x + 2$ ולכן, ניתן לחלק את צלע y לשני חלקים: ל- x ול- 2. המשוואה המתקבלת היא למעשה:

$x + x(x+2)=54$. בלשוננו, "הצבנו" את ערכו של y.

בשלב הראשון של הפתרון כתוב: " אתה מחבר שתיים לאחד, כך שיש לך 3". הכוונה: יש עכשיו 3 מלבנים שווים ששטח כל אחד מהם שווה ל- x. אם נפשט את המשוואה נקבל: $x^2 + 3x = 54$.

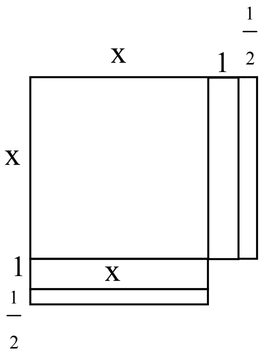


השלב הבא בפתרון: "אתה לוקח חצי, שנותן אחד וחצי"

הכוונה: לחלק לשניים את 3 המלבנים השווים.

מקבלים פעמיים מלבן וחצי.

המשוואה המתקבלת היא: $x^2 + 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}x = 54$

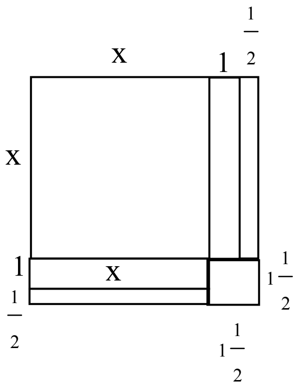


להמשך הבנת הפתרון, ניקח את החצי שהתקבל (מלבן וחצי) ונמקם אותו בחלק התחתון.

מתקבלת צורה שהיא "כמעט" ריבוע.

כדי להשלימה לריבוע צריך להוסיף בפינה ריבוע

שאורך צלעו $1\frac{1}{2}$ ושטחו: $\left(1\frac{1}{2}\right)^2 = 2\frac{1}{4}$



וזהו השלב הבא בפתרון: "כפול את אחד וחצי בעצמו, כך שאתה מקבל שתיים ורבע".

השלב הבא: "חבר לזה 54 ותקבל 56 ורבע".

השטח הכולל הוא עתה השטח הקודם ועוד שטח הריבוע הקטן שהתווסף, כלומר: $54 + 2\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$

המשוואה המתקבלת: $x^2 + 1\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4} = 54 + 2\frac{1}{4} \Leftarrow x^2 + 2\cdot 1\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{4} = 56\frac{1}{4}$

השלב הבא: " קח את השורש והחסר 1 וחצי. נשארו לך 6 וזוהי הצלע הקטנה".

ההסבר: מתקבל ריבוע גדול שאורך צלעו $x + 1\frac{1}{2}$ ושטחו $56\frac{1}{4}$. כלומר: $\left(x + 1\frac{1}{2}\right)^2 = 56\frac{1}{4}$ $\Leftarrow$

$x + 1\frac{1}{2} = \sqrt{56\frac{1}{4}} = 7\frac{1}{2}$ (שימו לב, הם לקחו רק את השורש החיובי) $\Leftarrow$ $x = 7\frac{1}{2} - 1\frac{1}{2} = 6$

השלב האחרון בפתרון: "הוסף 2 ויש לך את הצלע הגדולה שהיא 8". היות ונתון $y = x + 2$ מציבים את התוצאה שקיבלנו: $x = 2$ ומקבלים: $y = 6 + 2 = 8$.

הבבלים ידעו לפתור **משוואות ממעלה שלישית**. הם עשו זאת תוך שימוש בלוחות. היה להם לוח ובו התוצאה של n^3+n^2 עבור $n=1,2,\dots,30$:

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**	**30**
$\mathbf{n^3+n^2}$	2	12	36	80	150		27900

באמצעות לוחות אלו הם פתרו משוואות ממעלה שלישית מהצורה : $n^3+n^2=k$, וכן משוואות כלליות ממעלה שלישית, תוך שימוש בהצבות מתאימות.

לדוגמא, כדי לפתור את המשוואה : $x^3+2x^2-288=0$, הם הציבו $x = 2y$ וקיבלו את המשוואה :

$y^3+y^2=36$. על פי הטבלה מקבלים $y = 3$ ולכן, $x = 6$.

להלן תיאור השיטה הכללית לפתרון של משוואה ממעלה שלישית :

נתונה המשוואה : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. נציב : $x = y + t$ ונקבל :

$$a(y+t)^3+b(y+t)^2+c(y+t)+d=0 \Rightarrow ay^3 + (3at+b)y^2 + (3at^2+2bt+c)y + (at^3+bt^2+ct+d) = 0$$

נמצא t עבורו המקדם של y מתאפס : $3at^2 + 2bt + c = 0$. עבור t זה, המשוואה המתקבלת היא :

$ay^3 + (3at+b)y^2 + (at^3+bt^2+ct+d) = 0$.

נסמן : $a = P\ ,\ 3at+b = Q\ ,\ -(at^3+bt^2+ct+d) = R$ ונקבל את המשוואה : $Py^3 + Qy^2 = R$

נכפול את שני האגפים ב- $\frac{P^2}{Q^3}$ ונקבל : $\frac{P^3y^3}{Q^3}+\frac{P^2y^2}{Q^2} = R\cdot\frac{P^2}{Q^3}$.

נסמן $n=\frac{Py}{Q}$ ונקבל : $n^3 + n^2 = k$. נחפש בטבלה את ערכו של n עבורו מתקיים שוויון זה, ועל פי ערכו של n נוכל למצוא את ערכו של y וממנו את ערכו של x.

שימו לב, שהם הסתפקו בפתרון אחד שהם קיבלו.

פתרון משוואות ביוון

רקע

- המתמטיקה ביוון היא בשנת 600 לפנה"ס עד שנת 600 לספירה.
- הידע שלנו על התקופה היוונית מתבסס על העתקות של העתקות של מסמכים מקוריים.
- לכתיבת המספרים $1, 2, 3, \ldots$ השתמשו היוונים באותיות: $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ (אלף בית היווני). המספר 100 יוצג ע"י האות H, המספר 1,000 יוצג ע"י האות X והמספר 10,000 יוצג ע"י האות M.
- היוונים לא השתמשו בשיטת הפוזיציה.
- האלגברה היוונית הייתה בחלקה אלגברה רטורית (מילולית) וחלקה סינקופטית (שימוש בקיצורי מילים לצורך ציון מונחים – שימוש שהציג דיופנטוס).
- היוונים הכירו רק במספרים הרציונליים החיוביים.
- היוונים היו הראשונים שהפכו את המתמטיקה למדע, היות והם הפכו אותה מאוסף של דוגמאות מספריות למדע מדויק הכולל הוכחות. עיקר היצירה היוונית היא בתחום הגיאומטריה, דבר שהשפיע גם על האלגברה. לכן, פתרון של בעיות אלגבריות מוצג בחלקו באופן גיאומטרי.
- המתמטיקאי דיופנטוס (Diophntus, מאה שלישית לספירה) היה המתמטיקאי היחידי ביוון שעסק באלגברה. הוא היה הראשון שהכניס את הסימול המתמטי. לסימול פעולת חיבור הוא כתב מספר ליד מספר, לפעולת החיסור הוא השתמש בסמל ψ. לא היה לו סימול לפעולות הכפל והחילוק. משתנה הוא סימן ב- $\alpha\rho$ (אלפא ורו הן שתי האותיות הראשונות של המילה אריתמוס שפירושה מספר ומכאן המונח אריתמטיקה).

  לבסוף, היה לו סימול לחזקות: נעלם בריבוע הוא סימן ב- Δ^{ε} (האותיות דלתא ואפסילון הן שתי האותיות הראשונות של המילה דונאמיס שפירושה עוצמה), נעלם בשלישית הוא סימן ב- K^{ε} (ε, K הן שתי האותיות הראשונות של המילה קובוס שפירושה נפח). נעלם ברביעית הוא סימן ב- $\Delta^{\varepsilon}\Delta$. דיופנטוס היה הראשון שהשתמש בחזקות שהמעריך שלהן גדול משלוש.

פתרון משוואות

דיופנטוס עסוק בפתרון בעיות המובילות למערכת שבה מספר המשוואות קטן ממספר הנעלמים. משוואות מסוג זה נקראות כיום על שמו "**משוואות דיופנטיות**". דיופנטוס חיפש רק פתרונות שהם מספרים רציונליים חיוביים, וכאשר למשוואה ריבועית היה יותר מפתרון אחד, הוא התייחס רק לאחד מהם כפתרון. כיום נהוג לחפש במשוואות דיופנטיות רק פתרונות שהם מספרים שלמים. לדיופנטוס לא הייתה שיטה כללית לפתרון וכל בעיה נפתרה בדרך שונה. בעיות אלו הופיעו בספר שכתב בשם "אריתמטיקה".

<u>דוגמאות</u>:

א. אב נתן לבנו שקל אחד וביקש ממנו לקנות בולים במחיר 2 אג׳ וב- 3 אג׳ הבול. כמה בולים מכל סוג יכול הילד לקנות בסכום העומד לרשותו (100 אג׳)?

<u>פתרון</u>: נסמן ב- x את מספר הבולים שקנה ב- 2 אג׳ וב- y את מספר הבולים שקנה ב- 3 אג׳.

מתקבלת המשוואה: $2x + 3y = 100$. נחלץ את x ונקבל: $x = 50 - y - \frac{y}{2}$.

היות ו- x ו- y צריכים לקבל ערכים שלמים, נסמן $\frac{y}{2} = t$ ונקבל: $y = 2t$.

נבטא גם את x באמצעות t ונקבל: $x = 50 - 2t - t = 50 - 3t$.

לכן, כדי לפתור את המשוואה יש לחפש ערכי t שעבורם: $x = 50 - 3t\ ,\ y = 2t$.

על מנת ש- y יקבל ערכים שלמים אי-שליליים, נציב ערכים שלמים אי-שליליים עבור t:

עבור $t = 0$ נקבל: $x=50\ ,\ y=0$ כלומר, הוא יקנה רק 50 בולים של 2 אג׳.

עבור $t=1$ נקבל: $x=47\ ,\ y=2$, כלומר, הוא יקנה 47 בולים של 2 אג׳ ו- 2 בולים של 3 אג׳.

עבור $t=2$ נקבל: $x=44\ ,\ y=4$, כלומר הוא יקנה 44 בולים של 2 אג׳ ו- 4 בולים של 3 אג׳.

על מנת לבדוק אילו ערכים ניתן להציב עבור t יש לזכור שגם x צריך לקבל ערכים שלמים אי-שליליים, כלומר צריך להתקיים: $x \geq 0$ ו- x שלם $\Leftarrow$ $50-3t \geq 0$ ו- t שלם $\Leftarrow$ $t \leq \frac{50}{3}$, t שלם.

לכן: $t = 0, 1, 2, \ldots.\ 16$.

ב. המשוואה הדיופנטית המפורסמת ביותר היא המשוואה: $x^2 + y^2 = z^2$. מחפשים פתרונות במספרים טבעיים. שלשה של מספרים x, y, z שהיא פתרון המשוואה נקראת שלשה פיתגורית. הפתרון שהציגו היוונים (שכנראה היה ידוע כבר לבבלים) הוא: $x=p^2-q^2\ ,\ y = 2pq\ ,\ z=p^2+q^2$ כאשר $p>q$ ו- p , q מספרים טבעיים.

המסורת מספרת על חייו של דיופנטוס בצורה של חידה מתמטית אשר נכתבה במקור בצורה של חרוזים ונחרתה על מצבתו:

$\frac{1}{6}$ מאורך חייו היה דיופנטוס ילד; $\frac{1}{12}$ משנות חייו עברו עליו כנער; $\frac{1}{7}$ נוספת מחייו עברו עליו כרווק לפני נישואיו; 5 שנים אחרי נישואיו נולד לו בן, אשר מת 4 שנים לפני מות אביו. מספר שנות חייו של דיופנטוס עד מותו היה פי שתיים משנות חייו של בנו. בן כמה היה דיופנטוס במותו?

<u>פתרון</u>: נסמן ב- x את מספר שנות חייו. נקבל: $\frac{1}{6}x + \frac{1}{12}x + \frac{1}{7}x + 5 + \frac{1}{2}x + 4 = x$ $\Leftarrow$ $x = 84$.

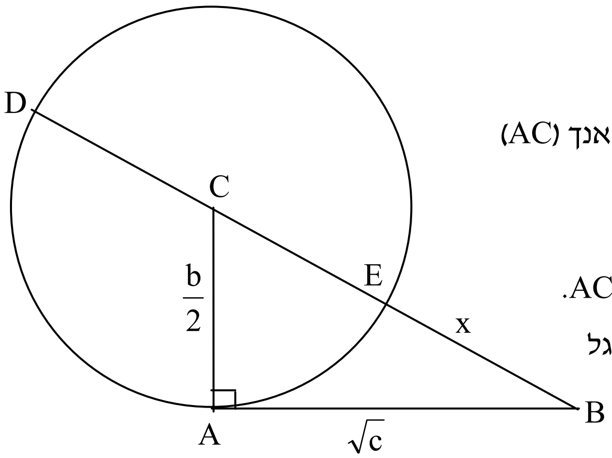
לכן, דיופנטוס נפתר בגיל 84.

היוונים הציגו דרך **גיאומטרית לפתרון משוואה ריבועית**, שבה ניתן באמצעות סרגל ומחוגה לבצע בניה גיאומטרית הנותנת את הפתרונות למשוואה הריבועית. היוונים הציגו דרך שונה לפתרון כל אחד משלושת סוגי המשוואות: $x^2 + bx = c$, $x^2 = bx + c$, $x^2 + c = bx$ כאשר b , c מס׳ חיוביים.

דרך זו מופיעה בספרו של דקארט (Descartes, 1596-1650) בספרו Geometric.

להלן תיאור השיטה עבור שלושת המקרים.

<u>מקרה ראשון</u>: $x^2 + bx = c$, b ו- c חיוביים.



א. משרטטים קטע (AB) שאורכו שווה ל- $\sqrt{c}$.

ב. מאחד מקצות הקטע (למשל, מ- A) מעבירים אנך (AC) לקטע ששורטט ב- א׳, באורך $\frac{b}{2}$.

ג. משרטטים מעגל, שמרכזו בנקודה C ורדיוסו AC.

ד. מעבירים קו ישר דרך B ו- C החותך את המעגל בנקודות E ו- D.

הקטע BE המתקבל שווה ל- x.

<u>הוכחה – דרך א׳</u>: הקטע CE הוא רדיוס המעגל ושווה ל- $\frac{b}{2}$.

ΔABC הוא משולש ישר זווית. לפי משפט פיתגורס נקבל: $AC^2+AB^2=BC^2 \Leftarrow$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{b^2}{4} + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} \Rightarrow x^2 + bx = c \Rightarrow$$

x מקיים את המשוואה המבוקשת ולכן הוא פתרון של משוואה זו.

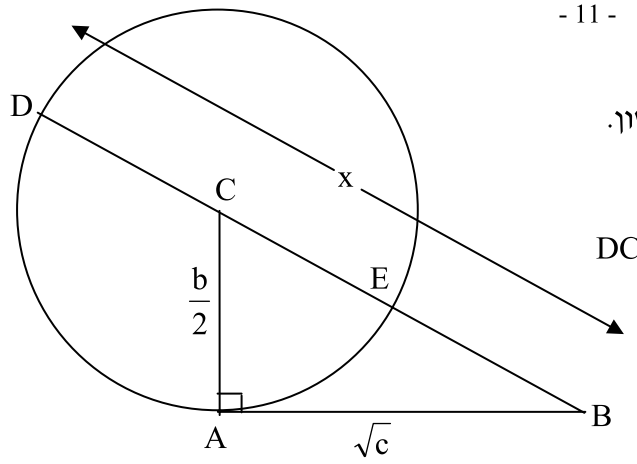
<u>הוכחה – דרך ב׳</u>: AB הוא משיק למעגל C (כי הזווית בין AB לרדיוס היא זווית ישרה).

על-פי המשפט הקובע שאם מנקודה מחוץ למעגל (נקודה B) יוצאים חותך (BD) ומשיק (AB) למעגל, אז מכפלת החותך בחלקו החיצוני שווה לריבוע המשיק, נקבל: $DB\cdot EB = AB^2 \Leftarrow$

$\left(x + 2\cdot\frac{b}{2}\right)\cdot x = \left(\sqrt{c}\right)^2 \Rightarrow x^2 + bx = c \Rightarrow$ x מקיים את המשוואה המבוקשת ולכן הוא פתרון של משוואה זו.

שימו לב שיש כאן התייחסות רק לפתרון החיובי. הפתרון השני המתקבל הוא $x = -BD$. נא להוכיח.

נסו לפתור בדרך זו את המשוואות: $x^2 + 5x = 36$, $x^2 + 24x = 81$.



<u>מקרה שני</u>: $x^2 = bx + c$, b ו- c חיוביים.

דרך הבניה היא אותה דרך כמו במקרה הראשון.

הטענה היא שבמקרה זה $BD = x$.

<u>הוכחה</u>: DC שווה לרדיוס המעגל ולכן: $DC = \frac{b}{2}$

ΔABC הוא משולש ישר זווית. לפי

משפט פיתגורס נקבל: $AC^2+AB^2=BC^2$

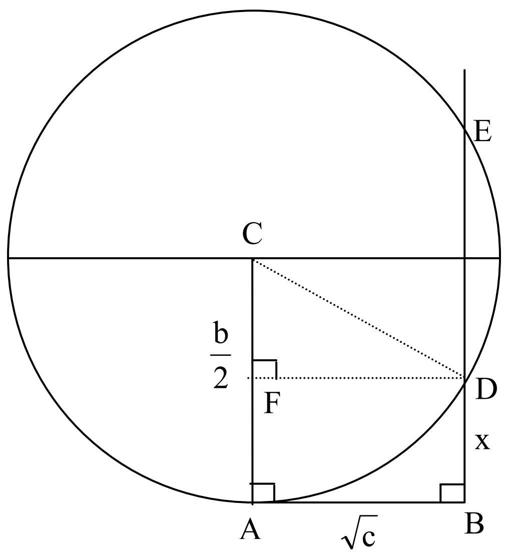
$\Leftarrow AC^2 + AB^2 = (BD-DC)^2 \Leftarrow$

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 = \left(x - \frac{b}{2}\right)^2 \Leftarrow \frac{b^2}{4} + c = x^2 - bx + \frac{b^2}{4} \Leftarrow x^2 = bx + c \Leftarrow$$

x מקיים את המשוואה המבוקשת ולכן הוא פתרון של משוואה זו.

שימו לב שיש כאן התייחסות רק לפתרון החיובי. הפתרון השני המתקבל הוא $x = -EB$. נא להוכיח.

נסו לפתור בדרך זו את המשוואות: $x^2 = 5x + 36$, $x^2 = 24x + 81$.



<u>מקרה שלישי</u>: $x^2 + c = bx$, b ו- c חיוביים.

שלבים א׳-ג׳ כמו במקרה הראשון.

ד. מנקודה B מעבירים אנך לקטע AB,
החותך את המעגל בנקודות D ו- E.
הקטע BD המתקבל שווה ל- x.

<u>הוכחה</u>: מנקודה D נעביר אנך ל- AC החותך את AC בנקודה F. המרובע ABDF המתקבל הוא מלבן (כל זוויותיו ישרות) $\Leftarrow$ $FD = AB = \sqrt{c}$, $AF=DB=x$.

ΔCFD הוא משולש ישר זווית. לפי משפט פיתגורס

נקבל: $CF^2+FD^2=CD^2$. היות ו- $CF = AC - AF = \frac{b}{2} - x$ נקבל: $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2} - x\right)^2 + \left(\sqrt{c}\right)^2 \Leftarrow$

$\frac{b^2}{4} = \frac{b^2}{4} - bx + x^2 + c \Leftarrow x^2 + c = bx \Leftarrow$ x מקיים את המשוואה המבוקשת ולכן הוא פתרון של משוואה זו.

הפתרון השני של משוואה זו הוא הקטע EB.

האם ניתן בדרך זו לפתור את המשוואה $x^2 + 36 = 8x$?

פתרון משוואות בהודו

רקע

- המתמטיקה ההודית החלה בשנת 300 לפנה״ס עד 1,200 לספירה.
- בהודו התפתחה במשך שנים צורת הכתיבה של המספרים הנהוגה כיום: 9 ... 0, 1, 2.
- ההודים כתבו שבר כאשר המונה נמצא מעל למכנה, אבל ללא קו שבר ביניהם.
- בהודו התפתחה (במאה החמישית - השביעית לספירה) שיטת הפוזיציה לפי בסיס 10 הנהוגה כיום – כולל קביעת סמל למספר 0. רק בכתיבת שברים הם השתמשו בשיטה הבבלית של כתיבת שבר בבסיס 60.
- בהודו נוצרו המספרים השליליים (במאה השביעית לספירה). למספר חיובי הם קראו ״רכוש״ ולמספר שלילי הם קראו ״חוב״. המתמטיקאי ברהמגופטה (Brahmagupta, מאה שביעית לספירה) ניסח כללים לחיבור וחיסור של מספרים שליליים, והמתמטיקאי בהסקרה (Bashkara, מאה 12 לספירה) ניסח כללים לכפל וחילוק של מספרים שליליים.
- האלגברה ההודית סווגה ככמעט סימבולית היות והם השתמשו בסמלים הנהוגים כיום לארבע פעולות החשבון, סמלים לחזקות וכו׳.

פתרון משוואות

ההודים הכירו בכך שלמשוואה ריבועית יש שני שורשים וכללו ביניהם גם את המספרים השליליים וגם את המספרים האי-רציונליים.

ההודים המשיכו ופיתחו את הפתרון של משוואות דיופנטיות ממעלה ראשונה וממעלה שניה. ברהמגופטה (Brahmagupta, מאה שביעית לספירה) הציע אלגוריתם למציאת כל הפתרונות השלמים של המשוואה הדיופנטית $ax + by = c$, ובהסקרה (Bashkara, מאה 12 לספירה) הציע אלגוריתם למציאת כל הפתרונות הטבעיים של המשוואה $x^2-Ny^2=1$ (N מספר טבעי) שכונתה מאוחר יותר (בטעות) משוואת פל (Pell). משוואה זו מאפשרת בין השאר מציאת קירובים לשורשים.

מתמטיקה בימי הביניים

- המתמטיקה בימי הביניים היא משנת 500 עד שנת 1,100 לספירה.
- בימי הביניים רק אנשים נבחרים יכלו ללמוד. בתקופה זו לא הייתה יצירה מתמטית רבה באירופה. נהוג לכן לכנות שנים אלו בשם שנות החושך.

פתרון משוואות

להלן מספר בעיות מתמטיות מתקופה זו, שהופיע ברשימה הנקראת אנתולוגיה יוונית (Palatine):

1. בנאי: אני רוצה לסיים את בניין ביתי. חסרים לי שלוש מאות בלוקים. אתה לבד יכול לגמור עבודה זו ביום אחד (יום אחד = 12 שעות). בנך, לפני שעזב את העבודה עשה 200 ביום אחד והחתן שלך עשה 250. אם תעבדו כולכם ביחד, כמה זמן תעשו זאת?
2. אני אריה עשוי מנחושת. מעיניי, מפי, ומבוהן רגלי הימנית יוצאים המים. המים מעיני הימנית ימלאו קערה בשני ימים, מעיני השמאלית בשלושה, מבוהן רגלי בארבעה, ומפי בשישה. אמור לי כמה זמן ימלאו את הקערה כולם ביחד? (יום אחד = 12 שעות).

לפתרון בעיות ממעלה ראשונה, השתמשו בימי הביניים בשיטה הנקראת Double False Position.
להלן תיאור השיטה (במונחים של זמננו):
כדי לפתור משוואה ממעלה ראשונה יש להביא את המשוואה הנתונה למשוואה השקולה לה מהצורה: $ax + b = 0$. לאחר מכן, להציב באגף שמאל שני ערכים שונים עבור x: עבור $x = x_1$ נקבל ערך שנסמנו ב- y_1; עבור $x = x_2$ נקבל ערך שנסמנו ב- y_2.

הפתרון של המשוואה $ax + b = 0$ הוא: $x = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1}$

<u>דוגמא</u>: על מנת לפתור את המשוואה $2x + \dfrac{5x}{2} = 27$, נביא אותה לצורה: $2x + \dfrac{5x}{2} - 27 = 0$

נציב $x = 2$ באגף שמאל ונקבל $2 \cdot 2 + \dfrac{5 \cdot 2}{2} - 27 = -18$

נציב $x = 4$ באגף שמאל ונקבל: $2 \cdot 4 + \dfrac{5 \cdot 4}{2} - 27 = -9$

לכן, הפתרון של המשוואה הוא: $x = \dfrac{2 \cdot (-9) - 4 \cdot (-18)}{(-9) - (-18)} = \dfrac{54}{9} = 6$.

<u>הוכחה</u>: לפתרון המשוואה $ax + b = 0$, $a \neq 0$ הצבנו שני ערכים באגף שמאל: הצבת x_1 באגף שמאל נותנת: $ax_1 + b$, הצבת x_2 באגף שמאל נותנת: $ax_2 + b$. אנו צריכים להוכיח כי $x = \dfrac{x_1y_2 - x_2y_1}{y_2 - y_1}$ הוא פתרון המשוואה. נציב את הערכים שקיבלנו ונקבל:

$$x = \frac{x_1(ax_2 + b) - x_2(ax_1 + b)}{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)} = \frac{ax_1x_2 + bx_1 - ax_1x_2 - bx_2}{ax_2 + b - ax_1 - b} = \frac{b(x_1 - x_2)}{a(x_2 - x_1)} = -\frac{b}{a}$$

ואכן, פתרון המשוואה $ax + b = 0$ הוא $x = -\dfrac{b}{a}$, $a \neq 0$.

פתרון משוואות במדינות ערב

רקע

- המתמטיקה הערבית מתחילה בשנת 800 לספירה ומסתיימת בשנת 1,600 לספירה.
- לכתיבת מספרים השתמשו הערבים בספרות ההודיות: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 וגם בספרות הערביות: ٩, ٨, ٧, ٦, ٥, ٤, ٣, ٢, ١, ٠
- הערבים השלימו את שיטת הפוזיציה על ידי כך שהוסיפו את המספרים העשרוניים. לכן, שיטת הפוזיציה העשרונית קרויה גם שיטת הפוזיציה ההודו-ערבית. בשברים פשוטים הם הוסיפו את הסימול של קו השבר, וכן סימנו קו אנכי המפריד בין השלם לשבר.
- הערבים הכירו במספרים האי-רציונליים, אבל התעלמו מן המספרים השליליים, למרות שהמתמטיקה ההודית הייתה ידועה להם.
- המילה "אלגברה" מקורה מתקופה זו. המילה באה מכותרת של ספר שכתב איבן-מוסא אלכואריזמי בשם: "Hisab al-Jabr wa'l Muqabalah" שתרגומה: שחזור ואיזון (פישוט/ביטול). המילה "אל ג'באר" מתייחסת לפעולה של העברת ביטויים מאגף לאגף במשוואה, והמילה "אלמוקאבלה" מתייחסת לחיסור ביטויים שווים משני האגפים. הספר עסק בפתרון של משוואות ממעלה ראשונה ושניה בדרך אלגברית ובדרך גיאומטרית.
  המילה "אלגוריתם" לקוחה מתוך השם אלכואריזמי. ספרו של אלכואריזמי תורגם ללטינית והוא נקרא שם אלגוריזמי. מכאן השם אלגוריתם.
- האלגברה הערבית הייתה בעיקרה אלגברה רטורית.

פתרון משוואות

האדם שעסק בתקופה זו בנושא של פתרון משוואות ממעלה ראשונה ושניה היה אלכואריזמי (Al-Khwarizmi, 780-850 לספירה). הוא מיין את המשוואות לפי סוגים. כך, את המשוואות הריבועיות הוא מיין ל- 5 סוגים: $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $ax^2 = bx + c$. אלכואריזמי התייחס ל- a, b, c כאל מספרים חיוביים. זאת היות והוא לא הכיר במספרים השליליים, וזו גם הסיבה למיון זה. הוא קרא ל- x^2 בשם ריבוע, ל- x בשם שורש, ולמספרים בשם מספרים. אלכואריזמי הציג את הפתרון למשוואות ריבועיות על ידי דוגמאות מספריות, וכל דרך הפתרון היתה רטורית /מילולית – כולל המספרים. הוא הציג פתרון בשתי דרכים: בדרך אלגברית ובדרך גיאומטרית. הוא הכיר בשני פתרונות חיוביים של המשוואה הריבועית, אך כאשר היה למשוואה פתרון שלילי הוא התעלם ממנו.

דוגמא לפתרון שהציג אלכואריזמי למשוואה הריבועית: $x^2 + 10x = 39$

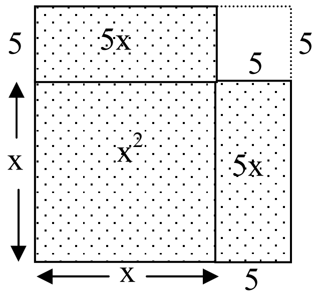
או בלשונו: ריבוע ועשרה שורשים שווים לשלושים ותשעה מספרים.

הפתרון: "חצה את מספר הפעמים שמופיע השורש, מתקבל חמש, כפול תוצאה זו בעצמה, המכפלה היא עשרים וחמש, הוסף אותה לשלושים ותשע, הסכום שישים וארבע. עתה קח את השורש של כמות זו, שהוא שמונה, וחסר ממנו מחצית ממספר השורשים שהיא חמש, השארית היא שלוש, זהו השורש של הריבוע הדרוש".

בסימול מודרני, אלכואריזמי נתן את הפתרון החיובי של המשוואה: $x^2 + bx = c$ שהוא:

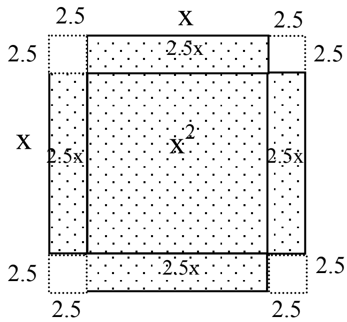
$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}.$$

אלכואריזמי נתן שתי הצדקות גיאומטריות על מנת לשכנע שהפתרון שהציג למשוואה $x^2 + 10x = 39$ הוא נכון:



<u>דרך א'</u> (בסימול שלנו)

מתחילים עם ריבוע שצלעו x. מחלקים את המלבן ש"אורכו" 10 ו"רוחבו" x לשני מלבנים זהים - כל אחד ב"אורך" 5 ו"ברוחב" x, ומצמידים אותם לריבוע (ר' שרטוט). מקבלים צורה ששטחה: $x^2 + 5x + 5x = x^2 + 10x$ (השטח הצבוע). לפי המשוואה המקורית, שטח צורה זו שווה ל- 39. משלימים את הצורה לריבוע גדול יותר על ידי הוספת ריבוע שאורך צלעו 5. השטח שהוספנו הוא 25. קיבלנו ריבוע גדול שאורך צלעו $x + 5$ ושטחו: $(x + 5)^2$ שווה ל- $25 + 39$. כלומר, קיבלנו: $(x + 5)^2 = 64$. עתה לוקחים את השורש הריבועי ומקבלים $x + 5 = 8$. מכאן $x = 3$.



<u>דרך ב'</u> (בסימול שלנו)

מתחילים עם ריבוע שצלעו x. מחלקים את המלבן ש"אורכו" 10 ו"רוחבו" x לארבעה מלבנים זהים – כל אחד ב"אורך" 2.5 וב"רוחב" x ומצמידים אותם לריבוע (ר' שרטוט). מקבלים צורה ששטחה: $x^2 + 4\cdot2.5x = x^2 + 10x$ (השטח הצבוע).

לפי המשוואה המקורית, שטח צורה זו שווה ל- 39.

משלימים את הצורה לריבוע גדול יותר על ידי הוספה, בפינות, של ארבעת ריבועים – כל ריבוע אורך צלעו 2.5. השטח שהוספנו הוא $4 \cdot 2.5^2 = 25$. קיבלנו ריבוע גדול שאורך צלעו $x + 5$ ושטחו: $(x + 5)^2$ שווה ל- $25 + 39$. כלומר, קיבלנו: $(x + 5)^2 = 64$. עתה לוקחים את השורש הריבועי ומקבלים $x + 5 = 8$. מכאן $x = 3$.

שימו לב שאלכואריזמי התייחס רק לפתרון החיובי.

אדם נוסף שתרם תרומה משמעותית לפתרון משוואות ממעלה שלישית היה עומר כיאם (1050-1130 לספירה). הוא פתר משוואות ממעלה שלישית באמצעות שיטות גיאומטריות הקשורות לחיתוך של עקומים קוניים (לדוגמא, חיתוך של פרבולה ומעגל, חיתוך של פרבולה והיפרבולה). עומר כיאם התייחס לנעלם כאל מספר חיובי שייצג: קטע (נעלם ממעלה ראשונה), שטח (נעלם בריבוע) או נפח (נעלם בשלישית).

פתרון משוואות בתקופה המודרנית – מן המאה ה- 16 ועד ימינו

רקע

- התקבלו לשימוש המספרים הרציונליים, האי רציונליים (שקיבלו ביסוס רק במאה ה- 19). המספרים השליליים התקבלו בהדרגה, והמספרים המרוכבים הוכנסו לשימוש.
- חלה התקדמות ניכרת בסימול המתמטי. האדם שתרם להתקדמות זו היה וייטה (1540-1603) שלראשונה השתמש באותיות כדי לייצג קבועים ידועים (פרמטרים), ובכך הבחין בין אותיות המשמשות לסימול נעלמים (האותיות האחרונות בא׳-ב׳) לבין אותיות המשמשות לסימול קבועים (האותיות הראשונות בא׳-ב׳).

פתרון משוואות

ההתקדמות הניכרת בסימול המתמטי איפשרה פתרון של משוואות באופן כללי ולאו דווקא פתרון של משוואות ספציפיות, למרות שעדיין ניתן לראות שימוש באלגברה סינקופטית (שימוש בקיצורים עבור סמלים) – למשל, אצל וייטה.

וייטה (Viete, במאה ה- 16) עסק בקשרים הקיימים בין המקדמים של משוואה ריבועית לבין השורשים (הפתרונות) שלה. המשפטים על סכום ומכפלת השורשים הם על שמו.

רבים (טרטליה, וייטה, פררי, בומבלי, קארדן, אבל ועוד) עסקו בפתרון של משוואות ממעלה הגבוהה מ- 2. לדוגמא, פררי (Ferrari) פתר משוואה ממעלה רביעית, אֶבֶל (Abel, במאה ה- 19) הצליח לפתור משוואה ממעלה חמישית והוכיח שלא יתכן פתרון כללי לפתרון של משוואה ממעלה חמישית. מאוחר יותר פיתח גלואה (Galois, מאה 19) שיטה המאפשרת לקבוע אילו משוואות ניתנות לפתרון באמצעות פעולות על המקדמים (פתרונות לפי רדיקלים).

פתרון משוואה ריבועית באמצעות הצבה

להלן שיטה, שהוצגה בתקופה זו, לפתרון של משוואה ריבועית $x^2 + bx + c = 0$:

א. מציבים $x = y + t$ ומקבלים: $(y + t)^2 + b(y + t) + c = 0$ $\Leftarrow$
$$y^2 + (2t + b)y + (t^2 + bt + c) = 0$$

ב. מאפסים את המקדם של y כלומר: $2t + b = 0$ $\Leftarrow$ $t = -\frac{b}{2}$.

ג. מציבים ערך זה של t במשוואה ומקבלים משוואה מהצורה: $y^2 = K \Leftarrow y = \pm\sqrt{K}$

ד. הצבנו $x = y + t$ ולכן נקבל: $x = t \pm \sqrt{k}$

<u>דוגמא</u>: כדי לפתור את המשוואה הריבועית: $x^2 - 6x + 8 = 0$, נציב $x = y + t$ כאשר

$3 = \frac{-6}{2} - = \frac{b}{2} - = t$. כלומר, נציב: $x = y + 3$ ונקבל: $(y+3)^2 - 6(y+3) + 8 = 0 \Leftarrow y^2 = 1 \Leftarrow$

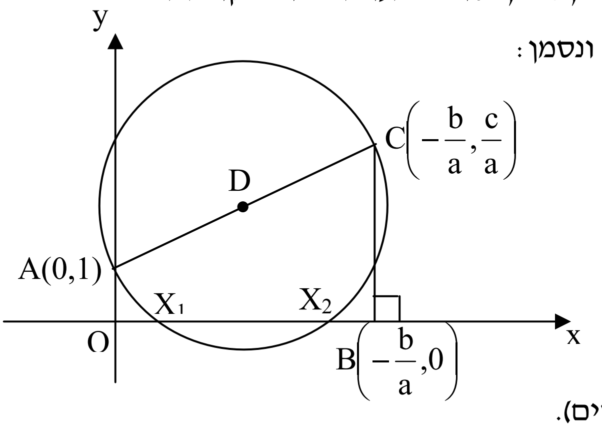
$y = \pm 1 \Leftarrow x_1 = 1 + 3 = 4$, $x_2 = -1 + 3 = 2$.

פתרון משוואה ריבועית באמצעות גיאומטריה אנליטית

דקארט (Descart, מאה 17) הציע פתרון למציאת שורשי המשוואה הריבועית, תוך שימוש בגיאומטריה אנליטית. קיימת אבחנה בין שלושה מקרים:

<u>מקרה ראשון: למשוואה הריבועית יש שני פתרונות ממשיים שונים</u>

על מנת לפתור את המשוואה הריבועית $ax^2 + bx + c = 0$, $a\neq 0$, נשרטט מערכת צירים קרטזית xOy, שבה נבחר אותן יחידות עבור ציר ה- x וציר ה- y, ונסמן:



א. קטע OA על ציר ה- y שאורכו 1.

ב. קטע OB על ציר ה- x שאורכו $-\frac{b}{a}$

(שימו לב, זהו סכום השורשים).

ג. קטע BC שאורכו $\frac{c}{a}$ ואשר נמצא על האנך לציר ה- x בנקודה B (שימו לב, זוהי מכפלת השורשים).

עתה נשרטט מעגל שקוטרו AC.

<u>טענה</u>: אם מעגל זה חותך את ציר ה- x בשתי נקודות X_1, X_2, אז האורכים OX_1 , OX_2 הם הפתרונות של המשוואה הריבועית $ax^2+bx+c=0$.

<u>הוכחה א'</u>: $\Delta OAX_1 \sim \Delta BX_1C$ (משולשים השווים בשתיים מזוויותיהם הם דומים: שניהם משולשים ישרי זווית, וכן $\angle OAX_1=\angle CX_1B$ כי $\angle AX_1C=90°$ כזווית היקפית הנשענת על קוטר, ומכאן $\angle AX_1O+\angle CX_1B = 90°$ או $\angle CX_1B=90°-\angle AX_1O$. כן $\angle OAX_1=90°-\angle AX_1O$)

מדמיון המשולשים נקבל: $\frac{X_1B}{BC}=\frac{OA}{OX_1}$. נציב את מידות הקטעים ונקבל: $\frac{-\frac{b}{a}-OX_1}{\frac{c}{a}}=\frac{1}{OX_1}$.

נפשט ונקבל: $(OX_1)^2+\frac{b}{a}OX_1+\frac{c}{a}=0$. נכפול ב- $a\neq 0$ ונקבל: $a\cdot(OX_1)^2+b\cdot(OX_1)+c=0$

ולכן, OX_1 הוא פתרון המשוואה הריבועית: $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. מ.ש.ל.

באופן דומה ניתן להוכיח שגם OX_2 הוא פתרון של אותה משוואה ריבועית.

<u>הוכחה ב'</u>: רדיוס המעגל הוא:

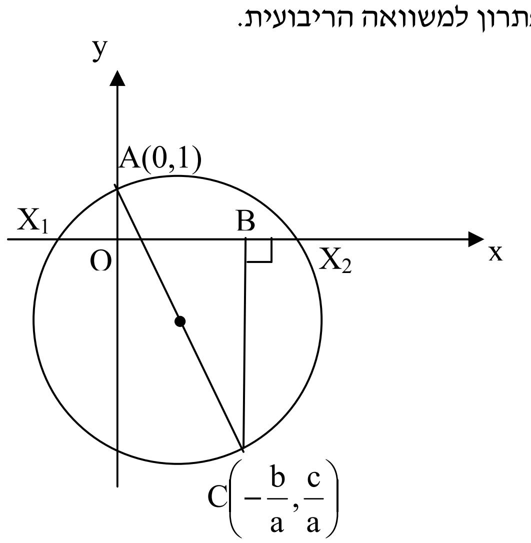
$$R=\frac{\sqrt{\left(-\frac{b}{a}-0\right)^2+\left(\frac{c}{a}-1\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)^2+\left(\frac{c-a}{a}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{b^2+(c-a)^2}}{2a},$$

שיעורי מרכז המעגל D: $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{a+c}{2a}\right) = \left(\frac{-\frac{b}{a}+0}{2}, \frac{\frac{c}{a}+1}{2}\right)$.

לכן, משוואת המעגל היא: $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(y-\frac{a+c}{2a}\right)^2=\frac{b^2+(c-a)^2}{4a^2}$

בנקודת החיתוך של המעגל עם ציר ה- x, מתקיים: $y = 0$. נציב במשוואת המעגל ונקבל:

$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\left(-\frac{a+c}{2a}\right)^2=\frac{b^2+(c-a)^2}{4a^2}$ ולאחר פישוט נקבל: $ax^2+bx+c=0$. כלומר, שיעורי ה- x של נקודות החיתוך של המעגל עם ציר ה- x הם פתרון למשוואה הריבועית.

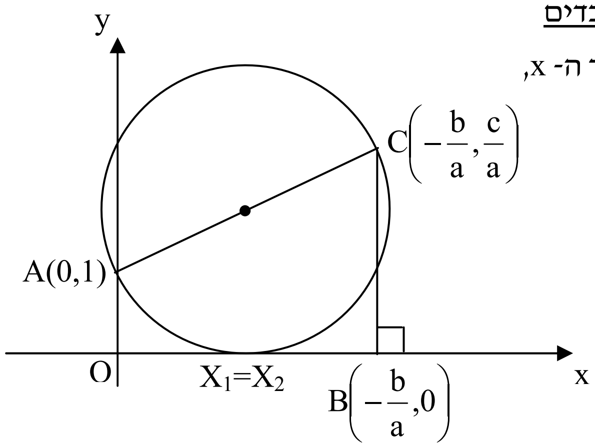


<u>הערה</u>: שני הפתרונות המתקבלים יכולים לחתוך את ציר ה- x משני צידיו, כלומר, יתכן שפתרון אחד יהיה חיובי והשני שלילי (ר' שרטוט).

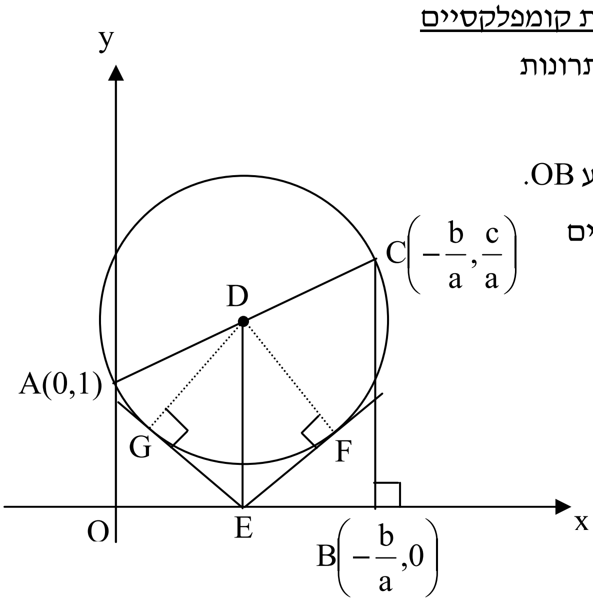
<u>מקרה שני: למשוואה הריבועית יש שני פתרונות מתלכדים</u>

כאשר הפתרונות x_1 ו- x_2 מתלכדים, המעגל ישיק לציר ה- x,

והפתרון יהיה: $OX_1 = OX_2 = -\frac{b}{2a}$ (ר' שרטוט)



<u>מקרה שלישי: למשוואה הריבועית יש שני פתרונות קומפלקסיים</u>



במקרה זה, הבניה של דקרט לא תביא לקבלת הפתרונות היות והמעגל לא יחתוך את ציר ה- x (ר' שרטוט).

נסמן ב- D את מרכז המעגל, ב- E את אמצע הקטע OB.

נעביר את שני המשיקים למעגל מנקודה E החותכים את המעגל בנקודות F ו- G.

נחשב, כמו קודם, את שיעורי מרכז המעגל:

$$D\left(-\frac{b}{2a},\frac{a+c}{2a}\right)$$

שיעורי הנקודה E (אמצע הקטע OB): $E\left(-\frac{b}{2a},0\right)$

ולכן, $OE=-\frac{b}{2a}$. כמו כן, אורך הקטע ED הוא: $\frac{a+c}{2a}$.

נחשב את אורכי המשיקים למעגל באמצעות משפט פיתגורס: $EF=EG=\sqrt{ED^2-DF^2}$

DF הוא רדיוס המעגל, והוא חושב לעיל (הוכחה ב') וכן חושב ED. נציב ערכים אלו ונקבל:

$$EF=FG=\sqrt{\left(\frac{a+c}{2a}\right)^2-\frac{b^2+(c-a)^2}{4a^2}}=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$$

כלומר, קיבלנו כי: $OE=-\frac{b}{2a}\quad;\quad EF=FG=\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. מהם ערכים אלו?

נתבונן במשוואה הריבועית: $ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$. אם למשוואה זו יש פתרונות מרוכבים, הרי שידוע כי: $\Delta<0$ ולכן, הפתרונות הם:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-(4ac-b^2)}}{2a}=-\frac{b}{2a}\pm i\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2}$$

<u>מסקנה</u>: במקרה של פתרונות מרוכבים, החלק הממשי הוא אורך הקטע OE (מחצית הקטע OB) והערך המוחלט של החלק המדומה הוא אורך הקטע EF (אורך המשיק מנקודה E).

פתרון משוואות באמצעות סדרות

לא ידוע אם אוילר (Euler, 1707-1783) המציא את השיטה שתתואר להלן, אבל היא מופיעה בצורה זו בספרו בנושא אלגברה.

<u>דוגמא א'</u>: נניח שרוצים לפתור את המשוואה: $x^2-2x-1=0$

אנו נחפש סדרה של מספרים: $p, q, r, s, t, \ldots$ כזו שהיחס בין כל שני מספרים סמוכים:

$\frac{q}{p}, \frac{r}{q}, \frac{s}{r}, \frac{t}{s}, \ldots$ ייתן קירוב טוב יותר למשוואה ככל שנתקדם בסדרה זו. במקרה כזה, אנו יכולים גם

להניח את ההנחה המוטעית ש- $\frac{q}{p}$ קרוב מספיק ל- x, כלומר נניח כי: $x = \frac{q}{p}$. אבל $\frac{r}{q}$ קרוב אפילו

יותר ל- x ולכן בוודאי שניתן לכתוב: $x = \frac{r}{q}$. לכן, נקבל: $x^2 = \frac{q}{p} \cdot \frac{r}{q} = \frac{r}{p}$. נציב ערכים אלו

במשוואה הנתונה ונקבל: $\frac{r}{p} - 2 \cdot \frac{q}{p} - 1 = 0$ ולאחר פישוט נקבל: <u>$r = 2q + p$</u>.

נציב ערכים שרירותיים עבור p ו- q (הערכים הראשונים בסדרה). לדוגמא, נציב: $p=0$, $q = 1$

ונשתמש ביחס שקיבלנו לעיל כדי לחשב את r ונקבל: $r = 2 \cdot 1 + 0 = 2$.

על מנת לחשב את האיבר הבא בסדרה, את איבר s נוכל לעשות את אותו התהליך שעשינו לעיל ונקבל: $s = 2r + q$, ולכן: $s = 2 \cdot 2 + 1 = 5$.

למעשה, קיבלנו נוסחא המקשרת בין כל איבר בסדרה (פרט לשניים הראשונים) לבין שני האיברים הקודמים לו (ניתן לרשמה בצורה רקורסיבית בצורה: $\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_n = 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases}$).

נמשיך באותו האופן ונחשב את האיברים האחרים בסדרה ונקבל את סדרת המספרים:

$$0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, \ldots$$

נחשב את היחסים בין כל שני איברים סמוכים בסדרה ונקבל:

$$2, 2.5, 2.4, 2.41667, 2.41379, 2.41429, 2.4142, 2.414215, 2.414213, \ldots.$$

(היחס הראשון $\frac{1}{0}$ הושמט מסיבות מובנות, למרות שאוילר כן רשם את היחס באופן זה)

סדרת מספרים זו מתקרבת למספר $1 + \sqrt{2} = 1.414213562\ldots$. קיבלנו את הפתרון החיובי.
עבור כל שני ערכים התחלתיים אחרים, נקבל את אותו הפתרון. נסו זאת!

<u>דוגמא ב'</u>: נניח שרוצים לפתור את המשוואה: $x^3 + 2x^2 - 23x - 70 = 0$. כאן אנו "מניחים" שמתקיים: $x = \frac{q}{p} = \frac{r}{q} = \frac{s}{r}$ ולכן נקבל: $x^2 = \frac{r}{p}$ ו- $x^3 = \frac{s}{p}$. נציב ערכים אלו במשוואה ונקבל:

$\frac{s}{p} + 2 \cdot \frac{r}{p} - 23 \cdot \frac{q}{p} - 70 = 0$. לאחר פישוט נקבל את היחס הרקורסיבי: $s = -2r + 23q + 70p$

שיאפשר לחשב את ערכי הסדרה, לאחר שניקח ערכים שרירותיים עבור שלושת האיברים

הראשונים p, q, r . לאחר חישוב איברי הסדרה, נחשב את היחס בין כל שני איברים סמוכים, ונקבל שסדרת יחסים זו מתקרבת למספר 5.13458.

תרגיל: נסו לפתור בדרך זו את המשוואה הריבועית $x^2 - x - 1 = 0$.

דוגמא ג': יש למצוא את השורשים של המשוואה: $x^2 - 2 = 0$.

כמו קודם: $\frac{r}{q} = \frac{q}{p} = x$, ולכן: $x^2 = \frac{r}{p}$. נציב במשוואה הנתונה ונקבל: $\frac{r}{p} = 2$ או $r=2p$

ניקח ערכים שרירותיים עבור p ו- q. נניח: $q = 2$, $p = 1$ ונקבל את סדרת המספרים:

$1, 2, 2, 4, 4, 8, 8, 16, 16, \ldots$ וסדרת היחסים: $2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \ldots$ וזו סדרה שאיננה מתכנסת. מסקנה: שיטה זו איננה עובדת במקרה של פתרון משוואה זו.

אוילר טען שהשיטה אינה עובדת עבור משוואות ממעלה n כאשר המקדם של האיבר x^{n-1} הוא 0.

הוא הציע במקרה זה, להציב: $x = y - 1$ ואז המשוואה המתקבלת היא: $(y-1)^2-2=y^2-2y-1=0$ וקיבלנו משוואה שבה ניתן ליישם שיטה זו. משוואה זו פתרנו בדוגמא א' והפתרון שקיבלנו הוא $y = 2.414213\ldots$ ולכן: $x = 1.414213\ldots$ או: $x = \sqrt{2}$.

דוגמא ד': יש לפתור את המשוואה: $x^2 + x + 1 = 0$.

היחס הרקורסיבי המתקבל הוא: $r = -(p+q)$. ניקח ערכים שרירותיים עבור p ו- q. לדוגמא, ניקח $p=q=1$ ונקבל את הסדרה: $1, 1, -2, 1, 1, -2, 1, 1, -2, \ldots$ ולכן סדרת היחסים:

$1, -2, -0.5, 1, -2, -0.5, \ldots$ לא מתכנסת. כך נקבל עבור כל שני ערכים אחרים ל- p ול- q.

הסיבה במקרה הזה היא שלמשוואה הריבועית אין שורשים ממשיים, ולכן לא ניתן בשיטה זו לקבל את השורשים הלא ממשיים של המשוואה הריבועית.

דוגמא ה': יש לפתור את המשוואה: $x^2 - 4x + 3 = 0$.

היחס הרקורסיבי המתקבל כאן הוא: $r = 4q - 3p$. ניקח: $p = q = 1$ ונקבל את הסדרה:

$1, 1, 1, 1, \ldots$ וסדרת היחסים היא: $1, 1, 1, \ldots$ ולכן השורש של המשוואה הוא $x = 1$.

מצד שני, אם ניקח ערכים התחלתיים אחרים עבור p ו- q, למשל: $p = 1$, $q = 3$, נקבל את הסדרה: $1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, \ldots$ וסדרת היחסים המתקבלת היא: $3, 3, 3, 3, 3, \ldots$ ולכן השורש של המשוואה הוא $x = 3$.

אם ניקח ערכים התחלתיים אחרים עבור p ו- q נקבל סדרה של יחסים שתוביל או לפתרון $x = 1$ או לפתרון $x = 3$.

מסקנה: קיבלנו את שני השורשים של המשוואה, כי שני השורשים הם חיוביים. במקרה זה הערכים ההתחלתיים שניקח יקבעו אילו משני השורשים נקבל.

יישום בהוראת מתמטיקה

מן ההיסטוריה של התפתחות המתמטיקה בכלל ושל התפתחות פתרון משוואות בפרט, ניתן ללמוד דברים שונים, אותם ניתן ליישם בהוראה בכיתה:

1. כיום אנו מציגים את המספרים באמצעות **שיטת הפוזיציה העשרונית**. ההתפתחות ההיסטורית מצביעה על כך שהיו תקופות שבהם לא השתמשו במתמטיקה בשיטה העשרונית (למשל, הבבלים), והיו תקופות שבהם לא השתמשו בשיטת הפוזיציה (למשל, הבבלים). חשיפת התלמידים לשיטת כתיבת מספרים שבה משתמשים בשיטה העשרונית, אך לא בשיטת הפוזיציה (שיטת הכתיבה של המצרים) עשויה לחדד את מהות השיטה העשרונית. חשיפת התלמידים לכתיבת מספרים שבהם משתמשים בשיטת הפוזיציה אך לא בבסיס 10 (שיטת הכתיבה של הבבלים – בסיס 60), עשויה לחדד את המהות של שיטת הפוזיציה ולחדד את ההבנה של ביצוע פעולות חשבון בין מספרים.
2. במהלך ההיסטוריה ניתן לראות שפיתוח של שיטות לפתרון של משוואות נבע מתוך צורך **בפתרון של בעיות מעשיות**. זו גם הסיבה שעד למאות המאוחרות עסקו רק בפתרון משוואות ממעלה ראשונה – שבה הנעלם סימן אורך, ממעלה שניה – שבה הנעלם סימן שטח וממעלה שלישית – שבה הנעלם סימן נפח.
ניתן ללמוד מכאן שרצוי להביא לתלמידים בעיות מעשיות – בעיות מחיי היום יום ולהראות להם את **הצורך** בפתרון של משוואות – דבר שעשוי לתת מוטיבציה לפתרון המשוואה.
3. במהלך ההיסטוריה פותחו **שיטות מעניינות לפתרון משוואות לינאריות**. למשל, שיטת ה-False Position ושיטת ה- Double False Position. ניתן להציג בפני התלמידים שיטות אלו לפתרון משוואות לינאריות, כדרכים נוספות לפתרון של משוואות מסוג זה. בנוסף, על מנת להבין / להסביר מדוע השיטה נכונה, יש צורך להבין את התהליך ולנמקו תוך הסתמכות על שיקולים מתמטיים (למשל, הבנה של מהות היחס הישר).
לבסוף, ניתן באמצעות שיטות אלו לעורר דיון בשאלה: "האם שיטת הניחוש היא שיטה קבילה בפתרון של משוואות?"
4. ההתפתחות ההיסטורית מצביעה על כך שמערכת **המספרים השליליים** התפתחה רק בתקופת ההודים - הרבה לאחר התפתחות מערכת המספרים החיוביים והרבה לאחר התפתחות מערכת המספרים הרציונליים. בנוסף, גם כאשר המספרים השליליים היו ידועים כבר, היו מתמטיקאים, שהתעלמו מהם – למשל, אלכואריזמי שהכיר את המתמטיקה ההודית, התעלם בפתרון משוואה ריבועית מן הפתרון השלילי. ואילו ההודים, שפיתחו את המספרים השליליים, התייחסו אליהם כאל "רכוש" או כאל "חוב", כלומר, התייחסו אליהם בהיבט המעשי.
התפתחות זו עשויה להצביע על הקושי שבקליטת המספרים השליליים, ללא היבט יישומי. רצוי לכן להציג בפני התלמידים ראשית את מערכת מערכת המספרים החיוביים (שלמים ורציונליים) לפני הצגת המספרים השליליים. בנוסף, במהלך הוראת נושא המספרים השליליים רצוי להראות להם את הצורך במספרים אלו.
5. ראינו שאצל הבבלים, המצרים והערבים הפתרון של בעיות הוצג באמצעות **ערכים מספריים** נתונים. כלומר, הם לא הציגו שיטה כללית לפתרון, אלא נתנו פתרון לכל בעיה באמצעות הערכים המספריים הנתונים.
גם בהוראה, רצוי בהצגת נושא מתמטי מסוים **להתחיל ראשית מדוגמאות מספריות**. הסיבה

היא שפתרון הבעיה באמצעות הערכים המספריים (ולא באופן כללי) עשוי להיות מוחשי יותר ובכך עשוי להבהיר את הנושא הנלמד. לאחר העיסוק במספר דוגמאות מספריות רצוי להגיע לידי הכללה, ואז לחזור שוב לדוגמאות המספריות.

6. במהלך ההיסטוריה אנו נתקלים בדוגמאות רבות בהן ניסוח הבעיה ופתרונה נעשה באמצעות **פניה אישית**, והצגת הפתרון נעשית **בצורה אופרטיבית**: "עשה כך...", "לאחר מכן עשה כך וכך...". ניסוח החומר הלימודי המתמטי בצורה של פניה אישית לתלמידים עשוי לעזור למעורבות אישית של הלומד.

7. בנושא של השימוש **בסימול מתמטי**. במהלך ההיסטוריה ראינו את משך הזמן הרב שלקח לסימול המתמטי להתפתח. פרשנים טוענים שזו גם הסיבה שבתרבויות מסוימות המתמטיקה לא התפתחה בקצב מהיר יותר. זו הזדמנות לדון עם התלמידים ביתרון של הסימול המתמטי כמאפשר תקשורת קצרה ומהירה. למשל, מאפשר לכתוב מספרים גדולים במהירות, מאפשר לבצע פעולות בין מספרים בצורה פשוטה, מקצר את דרך פתרון הבעיות ובכך מקל גם על הקריאה וההבנה של הפתרון ועוד.
מצד שני, צריך לזכור שהעובדה שלקח זמן רב עד שנכנס לשימוש הסימול המתמטי עשויה להצביע על קשיים בקליטת הסימול. כך גם בהוראה בכיתה: תלמידים שצריכים לפתור בעיה מסוימת או להבין נושא מתמטי מסוים, צריכים ראשית להפנים את הסימול המתאים עוד לפני שהם מבינים את השימוש בו. כך, תלמידים צריכים להבחין בהבדל שבין:
a^2 , $2a$, 22 , $a + 2$, a_2 , $\sqrt[2]{a}$, $\log_2 a$ וכו'.

8. במהלך ההיסטוריה ראינו דוגמאות רבות בהן דרך הפתרון הוצגה בצורה רטורית – באופן מילולי. **הצגה בדרך מילולית** בלבד עשויה **להקשות** על התלמידים את הבנת הפתרון. כאשר לווה **ההסבר בשרטוט או בהסבר גיאומטרי** מתאים (למשל: בתקופת הבבלים, הערבים) ההסבר המילולי הפך להיות ברור יותר. כך גם בהוראה בכיתה – רצוי, במידת האפשר, ללוות את ההסבר המילולי בדרכים נוספות להמחשת / הבהרת הנושא המתמטי. למשל: שרטוט מלווה, הסבר בדרך שונה.

9. במהלך ההתפתחות ההיסטורית קיימות דוגמאות רבות (הבבלים, הערבים, היוונים, דקארט, אוילר) לכך שקיימת **התייחסות למקרים השונים** הקיימים בנושא הנדון, ומתן פתרון שונה לכל מקרה. הבאת דוגמאות אלו מאפשרת לחשוף את התלמידים לצורך בניתוח המקרים השונים. ניתוח כזה דורש מיון למקרים השונים והתאמה של כל צורת פתרון למקרה המתאים – דבר הדורש הבנה בנושא הנלמד ולא רק יישום של טכניקה לפתרון.

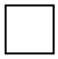
10. בחומר לעיל הוצגו שיטות שונות לפתרון משוואת, תוך שימוש באלגברה, בגיאומטרית המישור, בגיאומטריה אנליטית, בסדרות וכו'. ניתן להציג בפני התלמידים כל אחת מן השיטות הללו **במהלך הוראת הנושא המתמטי המתאים**. לדוגמא, במהלך הוראת הנוסחא למציאת השורשים של משוואה ריבועית, כאשר משתמשים בטכניקה של השלמה לריבוע, רצוי להראות לתלמידים את ההסבר הגיאומטרי של השלמה לריבוע (שיטות של הבבלים ושל אלכוארזמי) כך שיבינו מה מקור המונח "השלמה לריבוע".

במהלך ההתפתחות ההיסטורית ראינו פתרונות רבים המצביעים על **שילוב בין האלגברה לגיאומטריה**. בהוראה, רצוי להראות דוגמאות נוספות לשילוב כזה. להלן מספר דוגמאות:

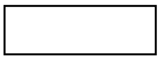
<u>דוגמא ראשונה</u>

כאשר עוסקים בנושאים שונים באלגברה, ניתן להשתמש במודל הבא:

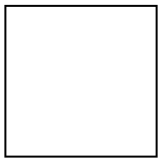
המספר 1 ייוצג על-ידי ריבוע שאורך צלעו 1, כלומר שטחו 1:



המספר x ייוצג על-ידי מלבן שאחת מצלעותיו x והשנייה היא 1, כלומר שטחו x:



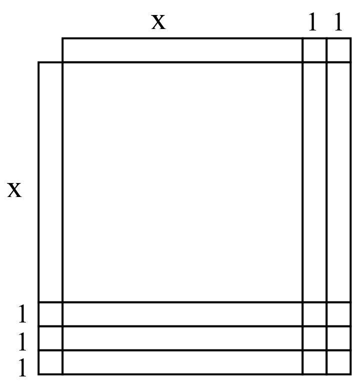
המספר x^2 ייוצג על-ידי ריבוע שארוך צלעו x, כלומר שטחו x^2:



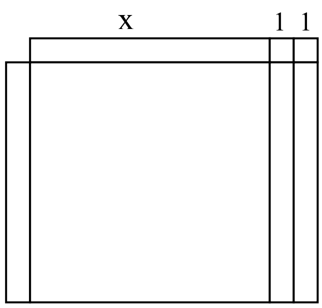
שימושים:

א. בנושא של **פתרון משוואות ממעלה ראשונה**, שבה המקדמים שלמים, ניתן להשתמש בריבועים (ששטחם 1) ובמלבנים הנ"ל, על מנת לייצג תבנית מספר מהצורה: $ax + b$, עבור a ו- b שלמים. לדוגמא, על מנת לפתור את המשוואה: $3(2x + 1) = 9$ יש לשים באגף שמאל שלוש פעמים שני מלבנים וריבוע שאורך צלעו 1 – כלומר, סה"כ יהיו באגף שמאל 6 מלבנים ו- 3 ריבועים. באגף ימין נשים 9 ריבועים. על מנת לפתור את המשוואה, מותר להוסיף או להוריד אותו מספר של צורות זהות משני האגפים. זאת עד שבאגף אחד נותר מלבן אחד (x) ובאגף השני ריבועים (מספר) או שניתן לחלק את שני האגפים לאותו מספר של קבוצות ואז בכל קבוצה מלבן אחד (x) שווה ערך לריבועים (מספר).

ב. ניתן להשתמש במודל הנ"ל גם לצורך המחשה של חוק הפילוג: $a(b+c)$ או $(a+b)(c+d)$
לדוגמא:



$(x+2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$

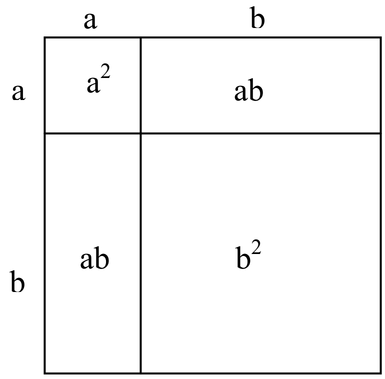


$x(x + 2) = x^2 + 2x$

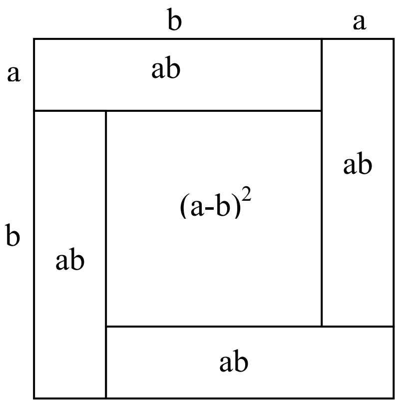
<u>דוגמא שניה</u>

כאשר עוסקים בנוסחאות הכפל המקוצר, רצוי להמחיש זאת באמצעות ייצוג הגיאומטרי.

לדוגמא:



$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$



$$(a+b)^2 = (a-b)^2 + 4ab$$

<u>דוגמא שלישית</u>

נתון מלבן שצלעותיו a ו- b. בונים ריבוע שמידת צלעו x. מהו x בכל אחד מן המקרים הבאים:

א. שטח הריבוע שווה לשטח המלבן; ב. היקף הריבוע שווה להיקף המלבן; ג. אלכסון הריבוע שווה לאלכסון המלבן; ד. היחס בין מידת שטח הריבוע למידת היקפו שווה ליחס אותן המידות במלבן.

תשובות: א. $x = \sqrt{ab}$ (ממוצע גיאומטרי). ב. $x = \frac{a+b}{2}$ (ממוצע חשבוני).

ג. $x = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ (שורש ממוצע הריבועים). ד. $x = \frac{2ab}{a+b}$ (ממוצע הרמוני)

<u>מקורות</u>

1. בן ברוך, נ. פתרון גאומטרי למשוואה ריבועית. *שבבים-עלון מורי מתמטיקה*, תיק מס' 2.
2. דוזורצ'ב, י. ויניצקי, ג. וקופר, א. (2001). תכנים הסטוריים לשילוב בהוראת המתמטיקה. הוצאת הטכניון.
3. ויניצקי, ג. (2003). טענה אחת – הוכחות בראי ההיסטוריה. *פעילויות בנושא הוכחות – אוגדן למורה, חלק ב'*, "קשר חם", הטכניון.
4. קראמן, ת. כיצד פתר אלחואריזמי משוואות ריבועיות. *שבבים – עלון למורי המתמטיקה*, תיק מספר 19
5. קשי, מ. (1995). מתמטיקה מצרית. סדנאות "קשר חם" בשנה"ל תשנ"ה. מתוך האתר: http://kesher.ort.org.il
6. Arndt, A. B. (1983). Al-Khwarizmi. *Mathematics Teacher* V76 n9 p. 668-70.
7. Flusser, P. (1992). Euler's Amazing Way to Solve Equations. *Mathematics Teacher*, V85 n3, pp. 224-27.
8. Maher, P. (1998). From Al-Jabr to Algebra. *Mathematics Teacher* V27 n4 p. 14-15.
9. Nannini, A. (1966). Geometric Solution of a Quadratic Equation. *Mathematics Teacher*, V. LIX n. 7, pp. 647-649.
10. National Council of Teachers of Mathematics (1983). Egyptian Mathematics. *Student Math Notes*, May 1983.