הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

הנושא: **מתמטיקה צבעונית - הלמה של שפרנר**

הוכן ע"י: פרופ' עמוס אלטשולר

תקציר: בחומר מובאת הצגה של הלמה של שפרנר המתיחסת למספר המשולשים, שקדקודיהם צבועים לפי כללים מסוימים, בשתי גירסאות: האחת, כמשחק ליחיד והשניה, כמשחק לשניים. מובאות שתי הוכחות ללמה והסבר על ההבדל ביניהן.

מילות מפתח: הנדסה, גיאומטריה, הנדסת המישור, גיאומטרית המישור, משפט עזר, למה, שפרנר, משולש, צלע, קדקוד, צביעת קדקודים, טופולוגיה, משחקים.

החומר פורסם במסגרת: שבבים - עלון מורי מתמטיקה, תיק מס' 4, עמ' 1-6 .

והוגש במסגרת: "קשר-חם" בבאר שבע, סדנא שניה בשנה"ל תשנ"א, מאי 1991.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

מתמטיקה צבעונית - הלמה של שפרנר

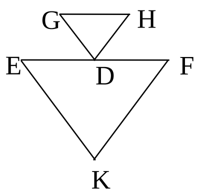
למה (Lemma) הינה "משפט קטן", או משפט עזר. משפט המכונה כך אינו בהכרח "קטן" מבחינת איכותו וחשיבותו. אדרבא, יש משפטים כבדי משקל במתמטיקה אשר משום מה דבק בהם השם למה. דוגמה בולטת של תופעה זו היא הלמה של שפרנר (Sperner) המשמשת נושא לדיוננו זה.

הלמה של שפרנר היא אחד המשפטים היפים במתמטיקה (אך זה כבר כמובן עניין של טעם...) . וזאת משום שטענתה פשוטה ומעניינת, אפשר לנסחה ולהבינה בעזרת משחק שגם ילד בן 7 יבינו וימצא בו עניין, את הוכחתה לא קל למצוא לבד, אך היא מפתיעה בפשטותה, ושמושיה כבדי משקל.

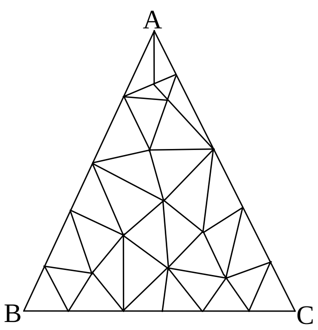
לא ניתן ללמה זו ניסוח פורמלי ומדויק, אלא נציגנה בעזרת משחק. אנו מציעים לקורא להכין את לוח המשחק, (לשם כך יש להצטייד בגיליון נייר, עט ושלושה צבעים), ולשחק בו, לפחות באחת משתי הגירסאות אשר נתאר, עוד לפני שהוא ניגש לעצם טענת הלמה ולהוכחתה.

<u>לוח המשחק</u>

מציירים משולש ABC, ומחלקים אותו למשולשים קטנים על-ידי הוספת קדקודים וצלעות.
הקדקודים החדשים רשאים להיות הן על הצלעות של המשולש ABC והן בתוכו, אך כמובן לא מחוצה לו. הדרישה היחידה היא שכל קדקוד אכן יהיה קדקוד בכל משולש בו הוא נוגע, ולא יהיה קדקוד עבור משולש אחד - וסתם נקודה בתוך צלע משולש אחר. כלומר, אסור המצב המתואר בציור א', שם D קדקוד של המשולש DGH אך אינו קדקוד במשולש EFK (ולכן EDFK הוא למעשה מרובע. אפשר לתקן זאת על ידי הוספת צלע DK). פרט לכך אין כל הגבלות, ואנו עשויים להגיע למשל למצב אשר בציור ב'.



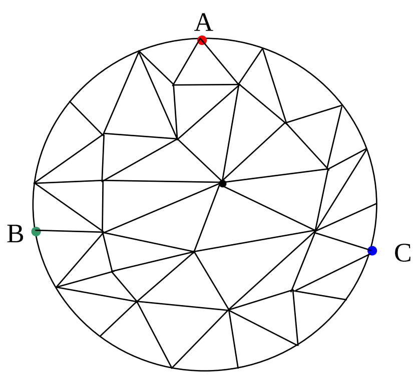
ציור א'



ציור ב'

עתה נצבע את הקדקודים A, B , C בשלושה צבעים שונים. למשל: A - אדום, B - ירוק, C - כחול. לוח המשחק מוכן.

נעיר עוד, כי הצלעות אינן חייבות להיות דווקא ישרות, אף לא צלעות המשולש ABC. אדרבא, צורה נעימה יותר לעין תתקבל אם נצייר את לוח המשחק כמעגל המחולק ל"משולשים", אשר בו שלוש הנקודות A, B , C הן קדקודים שעל שפת המעגל, כבציור ג'.



ציור ג'

<u>תאור המשחק</u>

<u>גירסה א׳ : משחק ליחיד</u>

השחקן צובע את כל הקדקודים אשר בלוח המשחק בעזרת שלושת הצבעים אדום, ירוק וכחול, כל קדקוד בצבע אחד. הצביעה שרירותית, פרט למגבלה אחת : קדקודים הנמצאים על הצלע AB (של המשולש המקורי) אסור שייצבעו בצבע של C (בדוגמה שלנו - כחול), הקדקודים שעל BC לא ייצבעו באדום (הצבע של A), ואלו שעל AC לא ייצבעו בירוק (הצבע של B). (או בניסוח חיובי : הקדקודים שעל כל צלע ייצבעו רק בצבעי הקדקודים שבקצות אותה צלע). אין כל הגבלה בצביעת הקדקודים שבתוך המשולש ABC (כמובן, יש להשתמש רק בשלושת הצבעים שלנו, אך אין כלל הכרח להשתמש בכל השלושה).

המטרה : להגיע לידי כך שלא יהיה אף משולש שקדקודיו צבועים בכל שלושת הצבעים.
לשם קיצור נקרא לצלע אשר שתי קצותיה נצבעו בשני צבעים שונים ״צלע יפה״, ולמשולש אשר כל צלעותיו ״יפות״ נקרא ״משולש יפה״. ברור כי תנאי הכרחי ומספיק שמשולש יהיה יפה הוא ששלושת קדקודיו נצבעו בשלושת הצבעים השונים.

מטרת המשחק היא להגיע לידי כך שכל הקדקודים יהיו צבועים לפי הכללים, ולא יהיה אף משולש יפה.

<u>גירסה ב׳ : משחק לשניים</u>

כל שחקן בתורו צובע קדקוד אחד. השחקן אשר אגב צביעת קדקוד יצר משולשים יפים, זוקף אותם לחובתו, וצובר נקודות שליליות כמספר המשולשים היפים אשר יצר. מנצח השחקן אשר בסוף המשחק רשומים לחובתו <u>פחות</u> משולשים יפים, ואילו זה שצבר יותר משולשים יפים - הפסיד.
הרקע למשחקים האלה היא הלמה הבאה :

<u>הלמה של שפרנר: מספר המשולשים היפים הוא אי-זוגי</u>

לפי זה, מאחר ש- 0 הוא מספר זוגי, הרי שבגירסה א׳ של המשחק אי אפשר כלל להגיע למטרה הנכספת, כי יהיה תמיד לפחות משולש יפה אחד ! זוהי מסקנה אשר לרבים קשה לעכלה גם אחרי קריאת הוכחת הטענה, ורבים הם שיהיו מוכנים שוב ושוב לנסות לבצע את הבלתי אפשרי!
התוצאה המכסימלית אליה יכול השחקן הבודד להגיע היא משולש יפה אחד בלבד, וקל מאוד להגיע לכך. (למשל באופן הבא : נצבע כל קדקוד שעל הצלע AB, פרט ל- B עצמו, באדום (שהוא צבעו של A) וכל קדקוד שאינו על הצלע AB בכחול (צבעו של C)). הלמה של שפרנר מאבדת בגירסה זו של המשחק, את טעמה.

המסקנה הנובעת מן הלמה של שפרנר לגירסה ב׳ של המשחק, היא שאי אפשר להגיע לתיקו. אחד מן השניים ינצח תמיד, והפרש הנקודות יהיה מספר אי-זוגי. כאן אין המשחק מאבד את טעמו, אדרבא - הוא נעשה מעניין יותר ככל שמרבים לשחק בו, כיוון שכל שחקן משתדל לא רק להימנע מיצירת משולשים יפים, אלא גם להכריח את יריבו ליצרם!

<u>הוכחות</u>

ניתן ללמה של שפרנר שתי הוכחות, אשר במבט שטחי הינן דומות למדי זו לזו, אך יש ביניהן הבדל עקרוני חשוב, המתבלט דווקא על רקע הדמיון הפורמלי שביניהן.

<u>הוכחה א':</u>

לכל צלע שבלוח המשחק נייחס <u>משקל</u>. משקל הצלע יהיה 0 אם שני קדקודיה צבועים באותו צבע. המשקל יהיה 1 אם שני הקדקודים צבועים בצבעים שונים (דהיינו המשקל הוא 1 אך ורק כאשר הצלע "יפה"). גם לכל משולש נייחס משקל, ומשקל זה יהיה סכום המשקלות של צלעות המשולש. משקל המשולש יסומן ב- $\omega(\Delta)$. ברור איפוא ש- $0 \le \omega(\Delta) \le 3$.

נבדוק ביתר פרוט את כל האפשרויות:
אם כל קדקודי המשולש Δ צבועים באותו צבע, אז משקל כל צלע ב- Δ הוא 0 ולכן $\omega(\Delta) = 0$.
אם שני קדקודים צבועים באותו צבע והקדקוד השלישי בצבע אחר, אז יש שתי צלעות יפות וצלע אחת בעלת המשקל 0, ולכן $\omega(\Delta) = 2$.
אם שלושת הקדקודים צבועים בשלושה צבעים שונים, אז משקל כל צלע הוא 1, ולכן $\omega(\Delta) = 3$.
אנו רואים איפוא כי לא יתכן $\omega(\Delta) = 1$. אך מה שיותר חשוב לעניינו היא המסקנה: $\omega(\Delta)$ אי-זוגי, אם ורק אם Δ הוא משולש יפה.

לכן, כדי להוכיח את הלמה של שפרנר, די להוכיח כי סכום המשקלות של כל המשולשים הוא מספר אי זוגי, כלומר, אילו היה סכום המשקלות של כל המשולשים (נסמן סכום זה ב- $\Sigma\omega(\Delta)$) מספר זוגי, עדיין לא היה זה מונע את קיומם של משולשים יפים, וגם לא היה מוכיח את קיומם. זה היה גורר רק שמספר המשולשים היפים הוא זוגי (וגם 0 הוא מספר זוגי). אך אם $\Sigma\omega(\Delta)$ הוא אי-זוגי, אז בהכרח מספר המשולשים היפים הוא אי-זוגי, ובפרט נובע מזה שיש לפחות משולש יפה אחד.

עתה, $\Sigma\omega(\Delta)$ שהוא סכום המשקלות של כל המשולשים, שווה לסכום המשקלות של כל הצלעות של כל המשולשים, כלומר לסכום המשקלות של כל הצלעות אשר בלוח המשחק, כאשר כל צלע פנימית - כלומר צלע שאינה על אחת הצלעות AC, BC, AB - נספרת פעמיים, שכן היא שייכת לשני משולשים, וכל צלע חיצונית - כלומר צלע הנמצאת על היקף המשולש ABC - נספרת פעם אחת, שכן היא שייכת רק למשולש אחד.

נסמן ב- ε את סכום המשקלות של הצלעות הפנימיות, וב- $\omega(A\!-\!B)$, $(\omega(C\!-\!A),\ \omega(B\!-\!C))$ את סכום המשקלות של הצלעות אשר על הצלע AB (ובהתאמה: CA , BC) של המשולש הגדול, ואז:

$$\Sigma\omega(\Delta) = 2\varepsilon + \omega(A\!-\!B) + \omega(B\!-\!C) + \omega(C\!-\!A)$$

ולכן כדי להראות ש- $\Sigma\omega(\Delta)$ אי-זוגי, די להראות כי $\omega(A\!-\!B) + \omega(B\!-\!C) + \omega(C\!-\!A)$ אי זוגי, ולשם כך די להראות כי כל אחד משלושה מחוברים אלה הוא אי זוגי.

נתבונן איפוא ב- $\omega(A\!-\!B)$. זהו סכום המשקלות של הצלעות אשר על הצלע AB של המשולש הגדול. נתחיל להתקדם על צלע זו, החל מ- A, לכיוון B. A אדום. אם הקדקוד הראשון שנפגוש אף הוא אדום, משקל הצלע שעברנו עליה הוא 0. אם הוא ירוק, משקל הצלע הוא 1. נניח שהוא אדום, ונמשיך להתקדם, כל זמן שאנו פוגשים קדקודים אדומים בלבד, משקלות הצלעות הם 0. המשקל יהיה 1 רק כאשר לראשונה ישתנה הצבע ויהיה ירוק. מעתה, כל זמן שאנו פוגשים קדקודים ירוקים בלבד, יהיו המשקלות 0, עד אשר לראשונה נפגוש קדקוד אדום, ואז משקל הצלע המתאימה יהיה 1.

כלומר: $\omega(A\!-\!B)$ שווה למספר <u>חילופי</u> הצבעים במעבר מ- A ל- B. אך מאחר שאנו מתחילים באדום ומסיימים בירוק, ובדרכנו פוגשים קדקודים ירוקים ואדומים בלבד, ברור שמספר חילופי הצבעים הוא אי-זוגי, ולכן $\omega(A\!-\!B)$ הוא אי זוגי.
אותה הוכחה פועלת גם עבור $\omega(B\!-\!C)$ ו- $\omega(C\!-\!A)$ וסיימנו.

הוכחה ב'

לצורך הוכחה זו, נשתמש במספרים במקום בצבעים. דהיינו: במקום "צבע אדום" נאמר צבע מס' 1, הירוק הוא צבע מס' 2, והכחול הוא צבע מס' 3. צלע נקראת "טובה" אם קדקוד אחד שלה צבוע במספר 1 והקדקוד השני צבוע במספר 2. לכל משולש Δ נייחס משקל $\omega(\Delta)$, שונה מאשר בהוכחה א': $\omega(\Delta)$ הוא מספר הצלעות הטובות במשולש Δ.

ברור כי: $\omega(\Delta) \leq 2$, ונבדוק את האפשרויות:

אם $\omega(\Delta) = 0$ אז צבע מס' 1, או צבע מס' 2 (או שניהם) אינו ב- Δ כלל.

אם $\omega(\Delta) = 1$ אז אחד מקדקודי Δ צבוע ב- 1, השני ב- 2 והשלישי ב- 3, כלומר Δ משולש יפה.

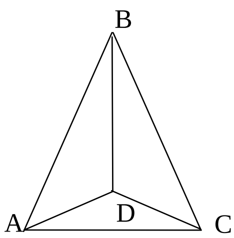
אם $\omega(\Delta) = 2$ אז צבע מס' 3 אינו מופיע כלל ב- Δ.

כלומר, $\omega(\Delta)$ אי-זוגי אם ורק אם המשולש Δ הינו יפה.
לכן, בדיוק כמו בהוכחה א' די להראות כי $\Sigma\omega(\Delta)$, סכום המשקלות של כל המשולשים, הוא אי זוגי.

אך שוב, בדומה להוכחה א', $\Sigma\omega(\Delta) = 2\alpha+\beta$ כאשר α הוא מספר הצלעות הטובות הפנימיות במשולש ABC (וכל צלע טובה כזו נספרת פעמיים, שכן היא שייכת לשני משולשים) ו- β הוא מספר הצלעות הטובות שעל שפת המשולש ABC. אך כל הצלעות הטובות שעל שפת המשולש ABC נמצאות על הצלע AB, ומספר הצלעות הטובות שעל הצלע AB שווה למספר חילופי הצבעים שם במעבר מ- A ל- B לאורך הצלע, וכבר ראינו בהוכחה א' כי מספר זה הוא אי-זוגי וסיימנו.

<u>ההבדל בין שתי ההוכחות</u>

על מנת להבין את ההבדל שבין ההוכחות, ננסה את הלמה של שפרנר עבור מקרה אחר, תלת-ממדי, וננסה להוכיחה. כאן במקום המשולש ABC תבוא פירמידה משולשת ABCD (ציור ד') וקדקודיה נצבעים בצבעים 1 , 2 , 3 , 4 .
מחלקים את הפירמידה ABCD לפירמידות קטנות במספר שרירותי ע"י הוספת קדקודים, צלעות ומשולשים. קדקודים חדשים יכולים להיות על הצלעות AB , BC... על הפאות ABC , ABD , ... ובתוך הפירמידה ABCD.
על-ידי כך מתחלקת כל פאה של הפירמידה ABCD למשולשים, בדומה למצב בגירסה הראשונה של הלמה של שפרנר.



ציור ד'

את כל הקדקודים (פרט ל- A , B , C , D שהם כבר צבועים) צובעים עתה בצבעים 1, 2, 3, 4 באופן כמעט שרירותי. המגבלה היחידה היא שהקדקודים אשר על הפאה BCD לא ייצבעו בצבע מס' 1 (הצבע של A), ובדומה לכך לגבי יתר הפאות.
הקדקודים שעל הצלע AB לא ייצבעו בצבעים 3 ו- 4 (הצבעים של C , D), וכן לגבי יתר הצלעות של הפירמידה ABCD. או בניסוח חיובי: כל קדקוד רשאי להיצבע רק באחד מצבעי קדקודי האלמנט הקטן ביותר בו הוא נמצא (צלע, פאה או פירמידה).
פירמידה תיקרא "יפה" אם ארבעת קדקודיה צבועים בכל ארבעת הצבעים. טענת הלמה של שפרנר במקרה זה היא שבכל צביעה כנ"ל, מספר הפירמידות היפות הוא אי-זוגי (ולכן לפחות 1).

טענה זו נכונה. באופן טבעי, היינו רוצים להוכיחה כפי שהוכחנו את הלמה במקרה הדו-ממדי. והנה מתברר, כי את הוכחה א' אי אפשר להתאים למקרה זה, ואילו ההוכחה ב' פועלת כאן היטב, וכמעט ללא שינויים, כדלקמן:

משולש ייקרא "טוב" אם קדקודיו צבועים בכל שלושת הצבעים 1, 2, 3. המשקל $\omega(\pi)$ של כל פירמידה π יהיה מספר המשולשים הטובים אשר בה (הפאות). בנקל נראה כי $\omega(\pi)$ אי זוגי אם ורק אם π פירמידה יפה. לכן די להראות כי $\Sigma\omega(\pi)$, סכום המשקלות של כל הפירמידות שלנו, הוא אי זוגי.

אך $\Sigma\omega(\pi) = 2\gamma + \delta$, כאשר γ הוא מספר המשולשים הטובים <u>שבתוך</u> הפירמידה ABCD (וכל משולש כזה נספר פעמיים, בהיותו משותף לשתי פירמידות קטנות) ו- δ הוא מספר המשולשים הטובים אשר על שפת הפירמידה ABCD. כל δ המשולשים הטובים הללו נמצאים בהכרח בפאה ABC, ולפי הניסוח של המקרה הדו-ממדי של הלמה של שפרנר הם יפים שם, ולכן לפי הלמה של שפרנר במקרה הדו-ממדי, δ אי-זוגי, וסיימנו.

במלים אחרות: אפשר לבנות את הוכחה ב׳ עבור הלמה של שפרנר במקרה ה- n-ממדי, כך שלמעשה תהיה הוכחה באינדוקציה על n, כאשר n מספר טבעי כלשהו, והלמה מנוסחת באופן מתאים. הקורא שאין לו מושג על גיאומטריה ממימד גדול מ- 3, יסתפק בערכים 1, 2, 3 עבור n. לעומת זאת הוכחה א׳ שלנו טובה רק למקרה הדו-מימדי, ותו לא.

תרגילים:

הקורא יוכל לבדוק את מידת הבנתו את כל הנאמר לעיל, על ידי שינסה לפתור את התרגילים הבאים, שהם קלים ואין בהם כל התחכמויות.

<u>תרגיל 1:</u>

נסה ליישם את הוכחה א׳ למקרה התלת-ממדי, וציין בדיוק באיזה שלב הניסיון נכשל.

<u>תרגיל 2:</u>

נסח את הלמה של שפרנר למקרה החד-ממדי, והוכח אותה בעזרת וריאציה מתאימה של הוכחה ב׳.

לפי זה, אפשר להתחיל את ההוכחה האינדוקטיבית עבור המקרה ה- n-ממדי של הלמה של שפרנר, כבר במקרה $n = 1$.

<u>תרגיל 3:</u>

נדון שוב במקרה הדו-ממדי, אלא שבמקום משולש, נצא הפעם ממצולע N בעל n צלעות, אשר יחולק למשולשים. משתמשים שוב בשלושה צבעים בלבד, כאשר n הקדקודים של המצולע N כבר צבועים בשלושה צבעים אלה.

המגבלה בצביעה כאן היא, שהקדקודים החדשים אשר על כל צלע של N ייצבעו רק בצבעי שני קדקודי אותה צלע. השאלה האם טענת הלמה של שפרנר (כלומר: מספר המשולשים היפים הוא אי זוגי, או יש לפחות משולש יפה אחד) נכונה גם במקרה זה, תלויה לא רק במספר n, אלא גם באופן בו צבועים n קדקודי המצולע N.

נסח בדיוק את התנאים, בהם תהיה טענת הלמה של שפרנר נכונה במקרה זה.

לפחות עבור ($n = 4, 5, 6$).

לסיום נעיר, כי בעזרת הלמה של שפרנר אפשר להוכיח משפטים כבדי משקל במתמטיקה, אשר המפורסם שבהם הוא משפט נקודת השבת של Brouwer.