הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״: לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: ״נחיתה רכה״ של הפונקציה ממעלה שנייה

הוכן ע״י: נצה מובשוביץ-הדר.

תקציר: בחומר מוצגות גישות מקוריות להוראת הנושא של פונקציה ממעלה שנייה וגם פונקציות ממעלות גבוהות יותר. האחת מציגה את הפונקציה הריבועית כמכפלה של שתי פונקציות קוויות, ומבססת את חקירתה על תכונות של פונקציות אלו. השנייה מציגה את הפונקציה הריבועית כסכום של שלושה מונומים, תוך הדגשת המשותף למשפחה של פונקציות המוזזות במישור.

מילות מפתח: אלגברה, פונקציה, פונקציות, פונקציה ממעלה ראשונה, פונקציה קווית, פונקציה ממעלה שנייה, פונקציה ריבועית, פרבולה, טכניקה אלגברית, פירוק לגורמים, מכפלת פונקציות, סכום פונקציות, טרנספורמציות, הזזה, מתיחה, נקודות חיתוך עם ציר ה- x, נקודות אפס, נקודות חיתוך עם ציר ה- y.

החומר הוגש במסגרת: ״קשר-חם״ בחיפה, סדנא שלישית בשנה״ל תשמ״ח, מאי 1998.
״קשר-חם״ בתל-אביב, סדנא ראשונה בשנה״ל תשנ״ג, נובמבר 1992.
״קשר-חם״ בבאר-שבע, סדנא ראשונה בשנה״ל תשנ״ג, נובמבר 1992.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 16 עמודים.

"נחיתה רכה" של הפונקציה ממעלה שנייה[1, 2]

נצה מובשוביץ-הדר

מבוא

התיאוריה הקונסטרוקטיביסטית הפכה בשנות ה- 80 לתפישה מקובלת במחקר בחינוך מתמטי, בהכשרת מורים, בפיתוח תוכניות לימודים וביישומן בכיתות.

(Kilpatrick 1987, Sinclair 1987, Vergnaud 1987, Wheeler 1987).

הקונסטרוקטיביסטים מאמינים שהלמידה היא תהליך פנימי שהתחרשותו גורמת לשינויים במסגרות המושגיות הקיימות אצל הלומד בהתחלת הלמידה, וכתוצאה מהם הלומד בונה לעצמו את הידע החדש שלו. לפיכך, ארגון הוראת המתמטיקה בפרקים נפרדים ומנותקים זה מזה ("במגירות") אינו הולם את התורה הקונסטרוקטיביסטית. כדי שהתלמיד ירכוש ידע חדש חשוב שלימוד המתמטיקה יביא ליצירת קשר בין הידע החדש הנרכש לבין הידע הקיים.

מאמר זה מציג גישה המאפשרת לבנות את הידע על פונקציות ריבועיות מתוך הידע שהצטבר על הפונקציות הליניאריות. בחלק הראשון של המאמר, נתבונן במכפלה של שתי פונקציות ליניאריות. בחלקו השני נתייחס אל הפונקציה הריבועית: $f(x) = ax^2 + bx + c$ כאל סכום של שלושה מונומים. אחרי כל חלק מופיע דיון בתועלת הפוטנציאלית שלו, ולבסוף מוצעות שאלות אחדות למחקר.

על מנת לממש את הרעיונות האלה במסגרת של תוכנית הלימודים או למטרות מחקריות, הכרחי להיעזר בתוכנת מחשב לתיאור גרפי של פונקציות פולינומיאליות, כמו למשל התוכנה "**אנליזה תיאורית**" (לוגל, 1988).

כל הפונקציות שאליהן נתייחס הן פונקציות ממשיות במשתנים ממשיים.

המכפלה של שתי פונקציות ליניאריות

נניח שאנו יודעים כבר די הרבה על הפונקציה הליניארית, על אופני ייצוגה (הגראפי והאלגברי) ועל הקשרים שביניהם, אבל איננו יודעים ולא כלום על הפונקציה הריבועית. למעשה, כפי שנראה, חלק גדול של הידע על פונקציות ריבועיות כבר קיים בכוח, ונותר רק להוציאו אל הפועל.

על פי ההנחה, בשלב זה אנחנו מצוידים בתמונה מנטאלית של גרף הפונקציה הליניארית, כלומר יכולים ללא קושי לראות בדמיוננו את המקום במערכת הצירים של הקו הישר המתאים לכל פונקציה נתונה ממעלה ראשונה. ננסה לבנות לעצמנו את הגרף של פונקציה f שעדיין איננו מכירים, המתקבל על ידי כפל של שתי פונקציות ליניאריות g ו- t המוגדרות לכל x כך:

$$g(x) = ax + b \quad \text{ו-} \quad t(x) = cx + d$$

לפיכך, f מתאימה לכל ערך של x את המכפלה $g(x)t(x)$.

לדוגמה, נתבונן בפונקציה הבאה: $f(x) = (0.5x + 2)(2x - 3)$

כמכפלה של: $g(x) = 0.5x + 2 \quad ; \quad t(x) = 2x - 3$

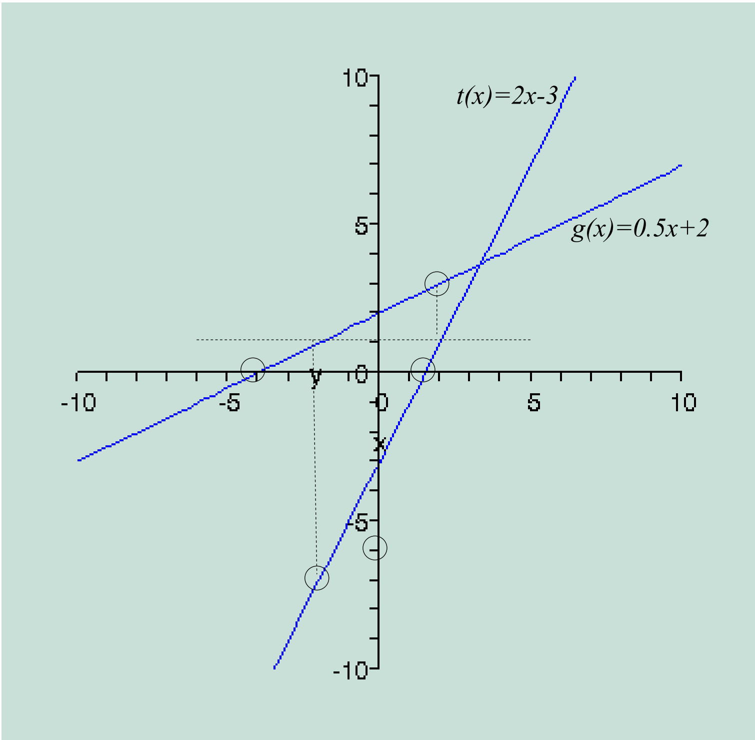
---

[1] פורסם ב"מסרים" עלון למורים למתמטיקה כרך ב' חוברת 3 טבת תשמ"ט 1989 . מאמר זה, בגרסה מוקדמת, הוצג בכנס החמישי של מו"ח – מחשבים וחינוך, תל-אביב, אפריל 1988

[2] תודות לאמנון ארבל איש חברת "לוגל" על רעיונותיו המעוררים, ולעזריאל אביתר, למירי עמית, לאורי לירון ולפיטר מוסטובוי על הערותיהם.

חמש נקודות כמעט ברורות מאליהן

מתברר שבידינו אצור מידע רב על הפונקציה הבלתי-מוכרת הזאת. לגרף שלה חייבות להיות **שתי** נקודות חיתוך עם ציר x, המתלכדות עם נקודות האפס של הגורמים הליניאריים. זה אומר שהפונקציה החדשה בוודאי **אינה** פונקציה ליניארית. בנוסף לכך, הפונקציה החדשה מתלכדת עם אחד מהקווים הישרים כאשר השני מקבל את הערך 1. כך יש לנו כבר ארבע נקודות של הגרף של הפונקציה החדשה. נקודה חמישית היא נקודת החיתוך של הפונקציה החדשה עם ציר y. נקודה זו ממוקמת במכפלת נקודות החיתוך של הפונקציות הליניאריות עם ציר y. בשרטוט מס' 1 מסומנות חמש הנקודות בעיגול.



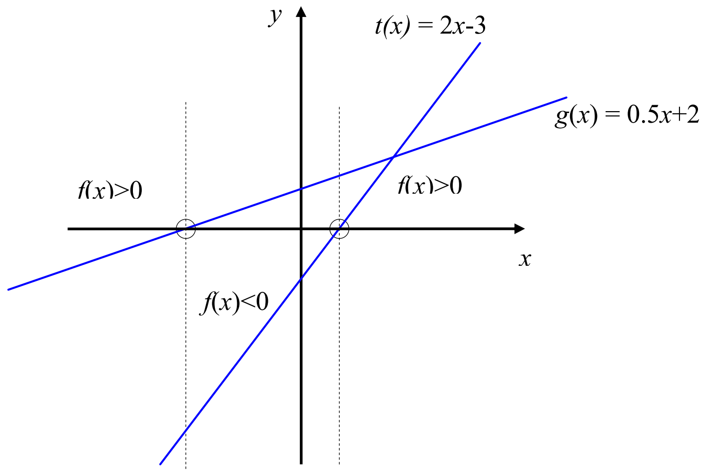
שרטוט מס' 1

ועוד כמה עובדות מעניינות . . .

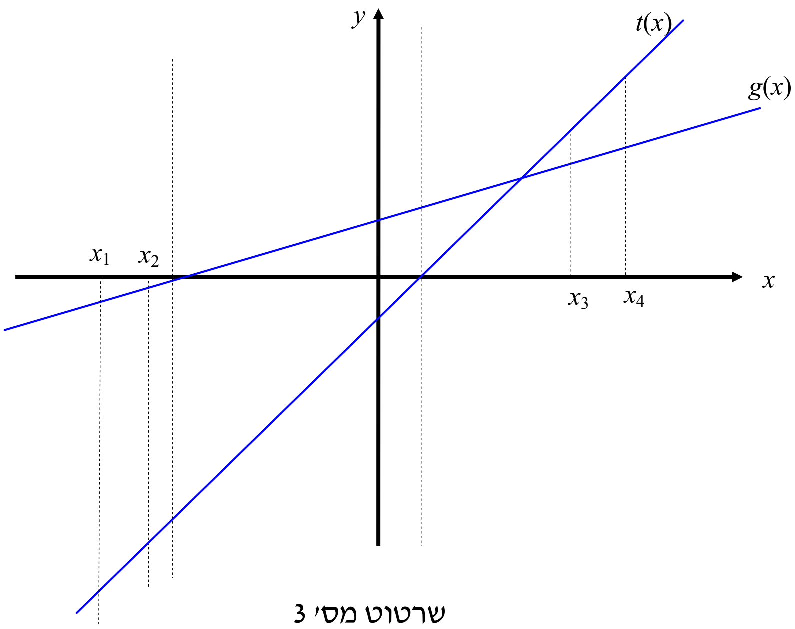
נוכל להגיע למידע נוסף על הפונקציה הלא-ליניארית על ידי זה שנחקור בקפידה את שני הגורמים הליניאריים. קודם כל ברור שהפונקציה החדשה מוגדרת לכל x. שנית, שתי הפונקציות הליניאריות רציפות בממשיים. כלומר, במונחים של בית-הספר העל-יסודי, ניתן לצייר את הגרפים שלהן "במשיכת קולמוס אחת", או ליתר דיוק, ניתן להשיג שני ערכים קרובים כרצוננו של הפונקציה על ידי בחירת שני ערכים מספיק קרובים של x. למי שהמושג הזה של רציפות של הפונקציה הליניארית אכן קיים אצלו, קל לראות שהמכפלה של שתי פונקציות רציפות אף היא רציפה. שלישית, מכפלה זו חיובית כאשר שני הגורמים הליניאריים הם בעלי אותו סימן, ושלילית כאשר הם בעלי סימנים שונים (שרטוט מס' 2).

זאת ועוד, עבור ערכי x הנמצאים משמאל לנקודת ה- 0 הקטנה יותר (כמו למשל x_1 ,x_2 בשרטוט 3) הערכים שהפונקציה החדשה מקבלת מהווים מכפלות של שני גורמים שליליים (כמו למשל $t(x_1)$ ו $g(x_1)$) שכל אחד מהם עולה (כפי שקל לראות מהשוואת הערכים שכל פונקציה מקבלת ב- x_1 וב- x_2). כל אחד מהגורמים, איפוא, יורד בערכו המוחלט, ולכן ככל ש- x גדל המכפלות (החיוביות) יותר קטנות. לפיכך, הפונקציה החדשה יורדת מ- $-\infty$ לפחות עד נקודת ה- 0 הקטנה יותר. באופן אנלוגי, ימינה מנקודת

ה- 0 הגדולה יותר, שתי הפונקציות יחד חיוביות ועולות (כמו למשל עבור $x_3,\ x_4$) (שרטוט מס' 3) ולכן בתחום זה מכפלתן (החיובית) עולה אף היא.



שרטוט מס' 2



שרטוט מס' 3

עכשיו צריך להיות ברור שככל ש- x מתקרב ל- $-\infty$ או ל- $+\infty$ פונקציית המכפלה מתקרבת ל- $+\infty$. על כן, בגלל רציפות הפונקציה, לכל ערך ממשי חיובי מתאים לפחות ערך אחד של x. יתרה מזאת, מאחר שהפונקציה החדשה מונוטונית בחצי העליון של המישור, כל ערך ממשי מתאים בדיוק לשני ערכים שונים של x: האחד משמאל לנקודת ה- 0 היותר קטנה, והשני מימין לנקודת ה- 0 היותר גדולה.

נחזור עתה לחלק של התחום הנמצא בין שתי נקודות ה- 0 בחצי התחתון של המישור. בגלל רציפות הפונקציה, בין שתי נקודות ה- 0, הגרף חייב לעבור מגרף יורד לגרף עולה וכתוצאה מזה, הטווח של הפונקציה החדשה לא יכול להשתרע עד ל- $-\infty$. חייב להיות לפונקציה ערך מינימאלי סופי, ולכן כל ערך שלילי בטווח, פרט אולי למינימום, מתאים לפחות לשני ערכים שונים של x בין שתי נקודות ה- 0.

נסכם בקצרה את כל הממצאים:

(1) התחום של הפונקציה $f(x) = (0.5x + 2)(2x - 3)$ הוא כל הישר הממשי.

(2) f היא פונקציה רציפה.

(3) ל- f יש שתי נקודות חיתוך עם ציר x, שכל אחת מהן מתלכדת עם אחת מנקודות ה- 0 של הגורמים: $g(x) = 0.5x + 2$, $t(x) = 2x - 3$ דהיינו $(1.5 , 0)$ ו – $(-4 , 0)$

(4) ל – f יש נקודת חיתוך אחת עם ציר y והיא $(0 , -6)$.

(5) f מתלכדת עם $g(x) = 0.5x + 2$ כאשר $t(x) = 1$ *בנקודה* $(2, 3)$.

(6) f מתלכדת עם $t(x) = 2x - 3$ כאשר $g(x) = 1$ בנקודת $(-2 , -7)$.

(7) f פונקציה חיובית בתחומים $-\infty < x < -4 \ , \ 1.5 < x < +\infty$

f פונקציה שלילית בתחום $-4 < x < 1.5$

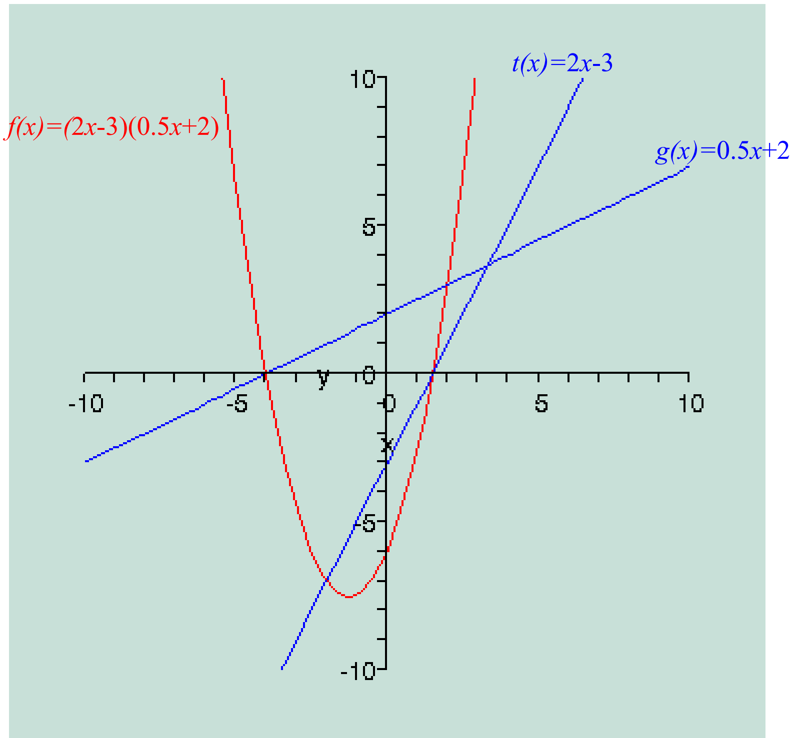
מ-(2) נובע שקיים ערך מינימאלי ל- f עבור ערך מסוים של x בתחום $-4 < x < 1.5$.

(8) f פונקציה יורדת בתחום $-\infty < x < -4$

f פונקציה עולה בתחום $1.5 < x < +\infty$.

מ-(1) נובע ש- f מקבלת כל ערך חיובי בדיוק פעמיים, פעם בכל צד.

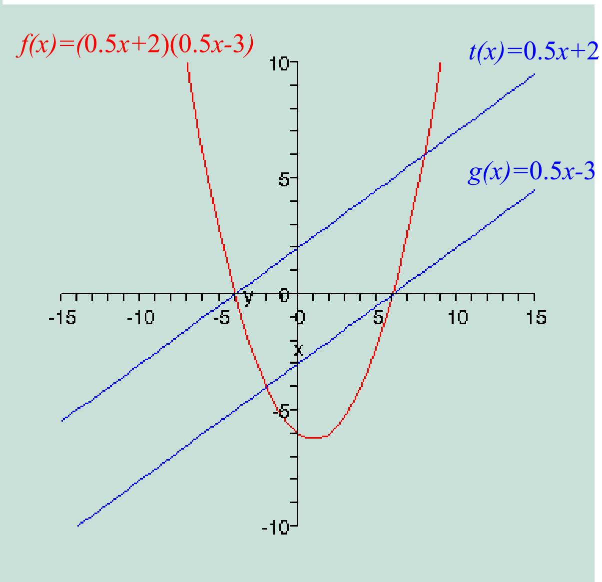
בעזרת מידע זה יש בידינו קירוב טוב למדי של צורת הגרף שחיפשנו. שרטוט מס' 4 מראה את צורתו המדויקת של הגרף של פונקציית המכפלה יחד עם הגרפים של גורמיה הליניאריים.



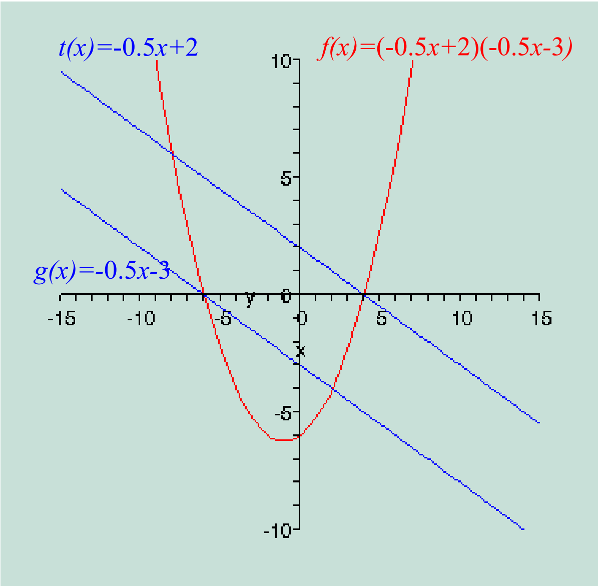
שרטוט מס' 4

מרחב החקירה של פונקצית המכפלה

היקף החקירה באמצעים המתוארים לעיל הוא עשיר מאוד. ניתן למשל להתבונן בתכונות של מכפלת שני קווים מקבילים ולבדוק את ההבדל בין תחומי העלייה והירידה כמתואר בשרטוטים מס' 5 ו- 6.

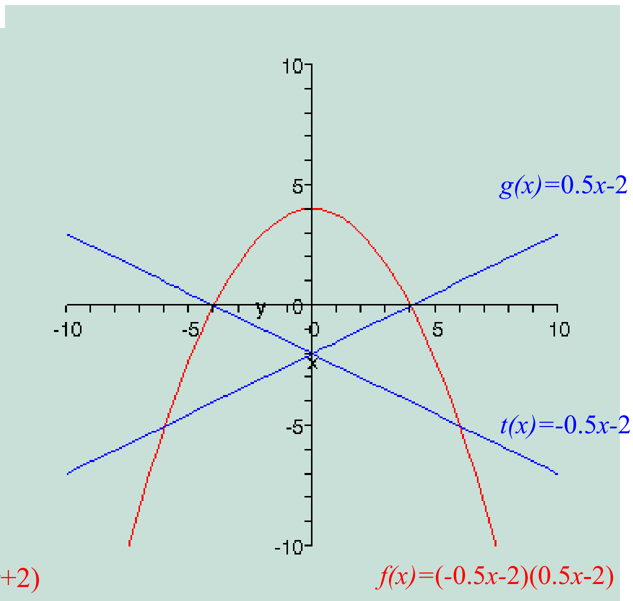


שרטוט מס' 5

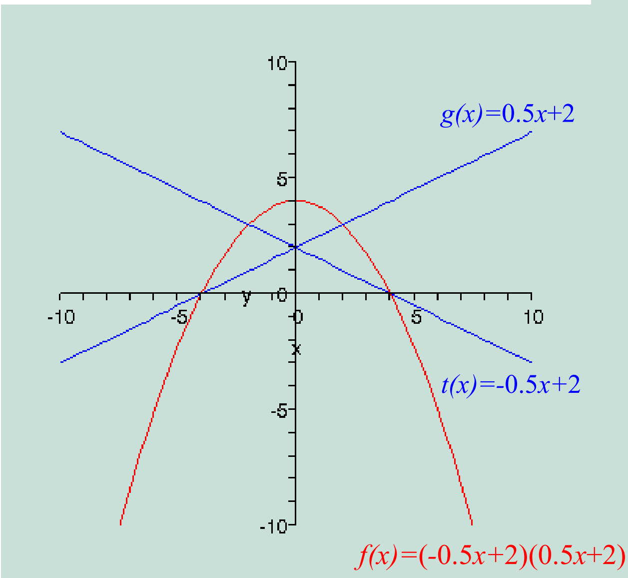


שרטוט מס' 6

אפשר גם להתבונן במכפלת שני קווים ישרים ששיפועיהם בעלי סימנים הפוכים ולבדוק את ההבדלים בין זוגות קווים הנחתכים באותה נקודה מעל לציר ה- x, ומתחתיו, כמתואר בשרטוטים מס' 7 ו- 8.

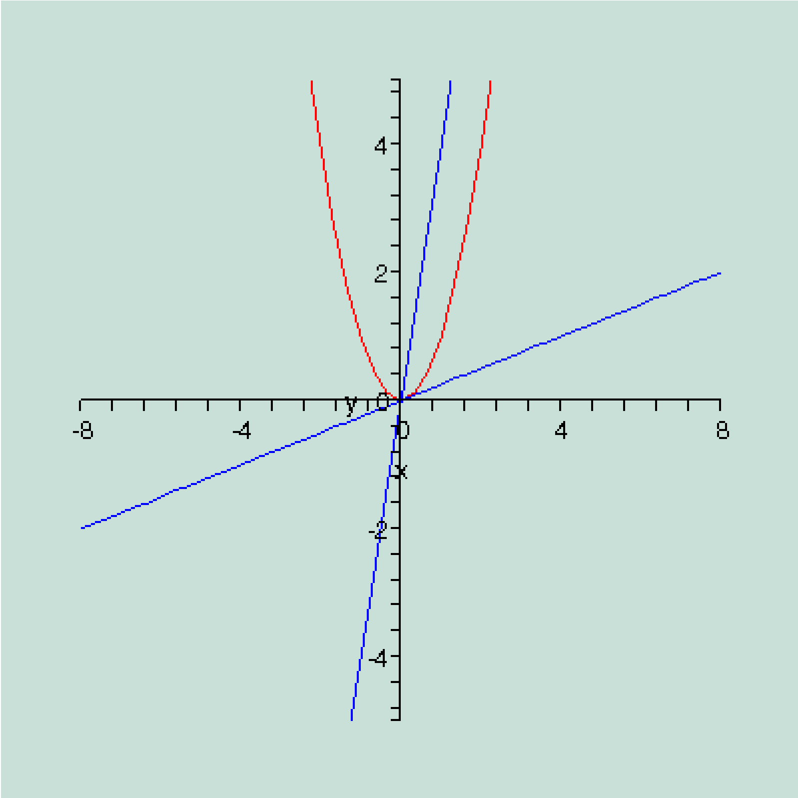


שרטוט מס' 7



שרטוט מס' 8

ראויה לחקירה מיוחדת היא המכפלה של שני קווים בעלי שיפועים הופכיים. שרטוט מס' 9 מתאר זוג כזה. שני הישרים בשרטוט מס' 9 עוברים דרך הראשית ומכפלתם יוצרת את הפרבולה היסודית $f(x) = x^2$. בחלק השני נעזר בה להמשך הפיתוח.



שרטוט מס. 9

האם במכפלה ניתן למצות את כל האפשרויות?

קיימת מגבלה חשובה שאין להתעלם ממנה בהקשר זה. אף כי הצורה הכללית של המכפלה של שתי פונקציות ליניאריות היא: $f(x) = ax^2 + bx + c$ אין פונקצית המכפלה נותנת תמונה שלמה של הפונקציה הריבועית מפני שלא כל פונקציה ריבועית ניתנת להצגה כמכפלה של שני גורמים ליניאריים.

נשאלת השאלה: איך הגרפים של אותן פונקציות לא-פריקות מתייחסים לגרפים של פונקציות ריבועיות שניתנות לפירוק ליניארי? נחזור לשאלה זאת וננתח אותה באופן איכותי אחרי דיון הביניים.

דיון ביניים

בדרך-כלל הלימוד של הפונקציות הריבועיות בא אחרי הלימוד של הפונקציות הליניאריות. בסוף לימוד אינטנסיבי של הקו הישר, ייצוגו האלגברי והגראפי והקשרים בין תכונות הקווים לבין הפרמטרים, סוגרים את "המגירה" הזאת והניתוח של הפונקציות הריבועיות פותח אפיק חדש לגמרי שבו מתחיל ניתוח שיטתי של הקווים העקומים. ברוב הספרים (אפילו בספר כל כך טוב כמו הספר של לורך (Lorch 1987) הפונקציות הריבועיות "מוצנחות" בלי כל קשר לפונקציה הליניארית שלימודה אך זה הסתיים. אכן התכונות של הקווים העקומים שונות מאוד מהתכונות של הקו הישר: שיפוע בלתי-קבוע, נקודת אקסטרמום, סימטריה לעיתים, אפשרות של זוגיות או אי-זוגיות וכו'. בנוסף לכך, הפיתוח המתמטי הטהור של הפונקציה הריבועית לא דורש ידע על הפונקציה הליניארית. נראה כביכול שיש הצדקה להפרדת שני הנושאים. למרות זאת, כפי שראינו, הפרדה זו לא רק שהיא מיותרת מבחינה מתמטית, אלא שמבחינה פדגוגית ופסיכולוגית

יש לה מחיר. לימוד הצורה האלגברית של מכפלת שתי פונקציות ליניאריות במקביל לחקירת ההצגה הגראפית של פונקצית המכפלה, יכול להוות מעבר טבעי מהפונקציות הליניאריות לפונקציות הריבועיות. חקירה נוספת של תכונות משותפות ושל הבדלים בין נציגים של תת-הקבוצות השונות של משפחת פונקציות-המכפלה, כפי שראינו לעיל, יכול להצעיד את התלמידים צעד משמעותי קדימה לקראת הבנה של הפונקציות הריבועיות במובן המלא של המילה, שעליה הרחיבו את הדיבור Davis ו- Henkin במאמריהם המשותפים (1978).

הפונקציה הריבועית כסכום של שלושה מונומים

תצפיות אחדות שמעוררות תמיהה

היחסים בין התכונות הגיאומטריות של הגרף לבין הערכים של כל אחד מהפרמטרים במקרה של הפונקציה ממעלה שנייה הרבה יותר מעורפלים מאשר במקרה של הפונקציה הליניארית. הטיפול המקובל בגרף של הפונקציה ממעלה שנייה $f(x) = ax^2 + bx + c$ בבית-הספר העל-יסודי הוא על ידי שרטוט של גרף הפונקציה $f(x) = ax^2 + k$, כאשר $k = (4ac - b^2) / 4a$, ועל ידי הזזת ציר y ב- $b/2a$ יחידות. טיפול זה מתבסס על הטיפול האלגברי הידוע בשם "השלמה לריבוע שלם" ונשען על חישוב הביטוי הידוע בשם "דיסקרימיננטה". תרגול טוב ומקובל בנושא זה הוא לתת ללומדים לערוך סקיצה של הגרף עבור פונקציות ממעלה שנייה בעלות ערכים שונים לאחד הפרמטרים, כאשר שאר הפרמטרים מקבלים ערכים קבועים. פעילות זאת כרוכה כידוע בהרבה חישובים. המגבלות של שרטוט ידני של סקיצה של פרבולה תורמות קושי נוסף. כל זה יוצר בסופו של דבר לימוד אשר בעיקרו הוא אלגברי וטכני של הפונקציות הריבועיות. עד כאן תצפית אחת.

ותצפית אחרת. האם ניסית אי-פעם לשאול באורח לא פורמאלי סטודנטים באוניברסיטה או תלמידי תיכון איפה בערך במערכת הצירים נמצאת הפרבולה המתאימה לפונקציה ריבועית מסוימת?

מעטים בלבד מהסטודנטים ועוד פחות מבין בוגרי בית-הספר התיכון מסוגלים לתת תשובה לכך. פעמים רבות ביקשתי מסטודנטים שאך זה סיימו לימוד אינטנסיבי של הנגזרת לצייר סקיצה של פרבולה המתבססת על הערכים של a, b, c.

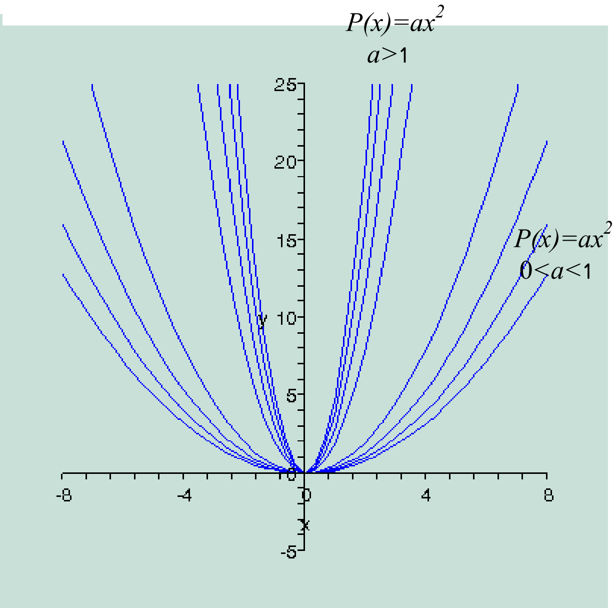
רובם ככולם יודעים להגיד אם הפרבולה "ישרה" או "הפוכה" לפי סימנו של a. השפעתו של c על הזזה מעלה או מטה מוכרת לחלק. אבל מעטים יודעים את ההבדל בין $|a| > 1$ לבין $0 < |a| < 1$ ומעטים מאוד "רואים" את המשמעות הגראפית של העובדה ש- $b = f'(0)$, כלומר b הוא השיפוע של המשיק לפרבולה בנקודה $x = 0$.

תצפיות אלו הובילו אותי לפיתוח של גישה אלטרנטיבית, שתלמיד בית-ספר תיכון יכול בלי ספק להבין.

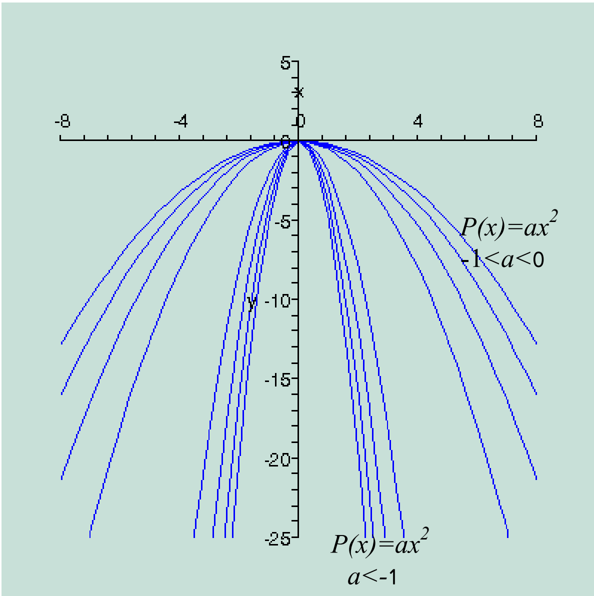
הנחות לגבי הידע ההתחלתי

בשלב זה נניח שליטה טובה בפונקציה הליניארית, כמו מקודם, ובנוסף לכך גם היכרות טובה עם פונקציות ריבועיות מן הסוג $p(x)= ax^2$. במילים אחרות, אנו מניחים כעת יכולת ליצור תמונה מנטאלית של הגרף של כל פונקציה מהצורה $l(x)= ax$ כולל קשריה עם הפונקציה מהצורה $t(x)= ax+ b$, וכמו כן גישה מנטאלית ישירה לצורה ולמיקום היחסי במערכת הצירים של משפחת הפרבולות הסימטריות ביחס לציר y, כל אחת עם קודקודה בראשית (שרטוטים מס' 10 ו- 11).

כפי שראינו לעיל ניתן לעשות זאת באמצעות המכפלה של שתי פונקציות ליניאריות שבהן ערכי a הופכיים ו-b מקבל את הערך 0.



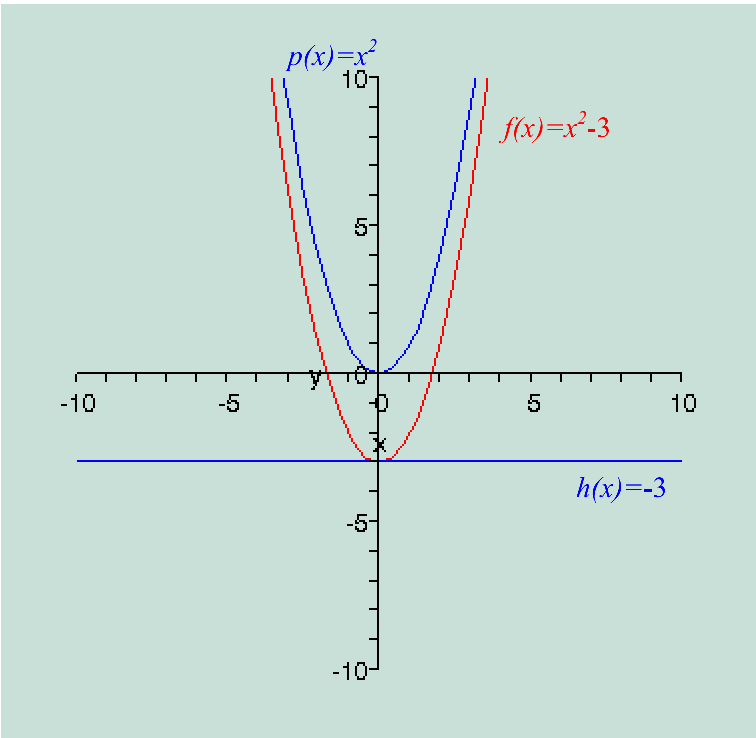
שרטוט מס' 10



שרטוט מס' 11

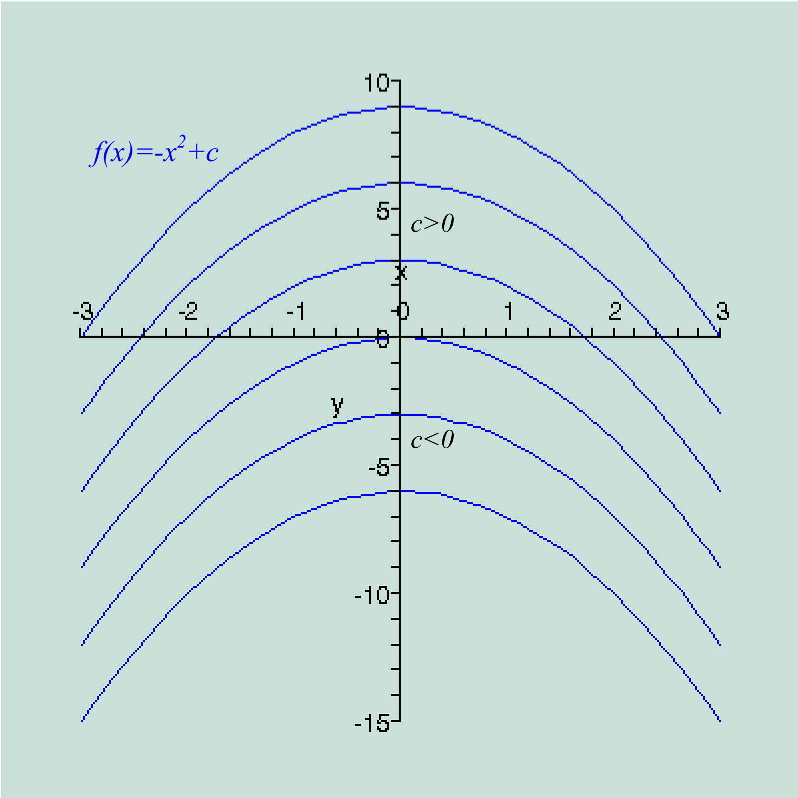
הפונקציה $f(x) = ax^2+c$ כסכום

כדי להתחיל מהמקרה הפשוט ביותר, נניח ש- $f(x) = ax^2 + c$ היא סכום של פונקציה קבועה $h(x) = c$ ופונקציה ריבועית מונומיאלית $p(x) = ax^2$. די בולטת לעין האנלוגיה של מקרה זה למקרה של הוספת קבוע לקו ישר העובר בראשית. הקו האופקי "מזיז" את הפרבולה כמו שהיא, כלפי מטה או מעלה, בהתאם לסימנו של c (שרטוט מס' 12).



שרטוט מס' 12

בגלל המימדים הסופיים של הנייר, הלוח או המסך, הגרפים של שתי הפונקציות לא תמיד נראים חופפים. על כן מראה העיניים עלול במקרים רבים להטעות. על מנת להתגבר על הבעיה הזו, מומלץ לשרטט את שני הגרפים במסגרת שחותכת את שתי הפונקציות עבור אותו ערך של x, ולא עבור אותו ערך של y , כמתואר בשרטוט מס' 13.



שרטוט מס' 13

אפילו בשלב ראשוני זה של טיפול בפונקציות, קל לשער שההכללה תופסת, היינו, שתוספת של פונקציה קבועה לגרף של פונקציה כלשהי מסתכמת בהזזה קשיחה של גרף הפונקציה למטה או למעלה בהתאם לסימנו של הקבוע c.

הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$ כהזזה של מכפלת קווים ישרים

לעיל הזכרנו שההסתכלות על המכפלה של שתי פונקציות ליניאריות אינה מקיפה במלואה את משפחת הפונקציות הריבועיות, שכן לא כל טרינום הוא פריק. אפשר לסלק את המגבלה הזאת באופן הבא. כיוון שכל טרינום ראשוני מהצורה $ax^2 + bx + c$ אפשר לשנות לטרינום פריק על ידי שינוי של הקבוע c, נוכל להתייחס לכל פונקציה ריבועית כאל מכפלה של שתי פונקציות ליניאריות, המוזזת כלפי מטה או מעלה, בהתאם לסימן של המספר שמוסיפים ל- c , כדי להפוך את הטרינום לפריק. למשל, אם נוסיף לפולינום $x^2 + 2x + 3$ את הקבוע -2 נקבל פולינום פריק $(x + 1)(x + 1)$. לפיכך, הפונקציה הריבועית $f(x) = x^2 + 2x + 3$ היא בעלת גרף חופף לזה של הפונקציה $f(x) = (x + 1)^2$ אבל זה האחרון מוזז כלפי מטה ב-2 ביחס לרצוי. נקודה זו סוגרת את ההסתייגות שהועלתה בסוף החלק הראשון לגבי כלליות הטיפול בפונקציות הריבועיות כמכפלות של פונקציות ליניאריות.

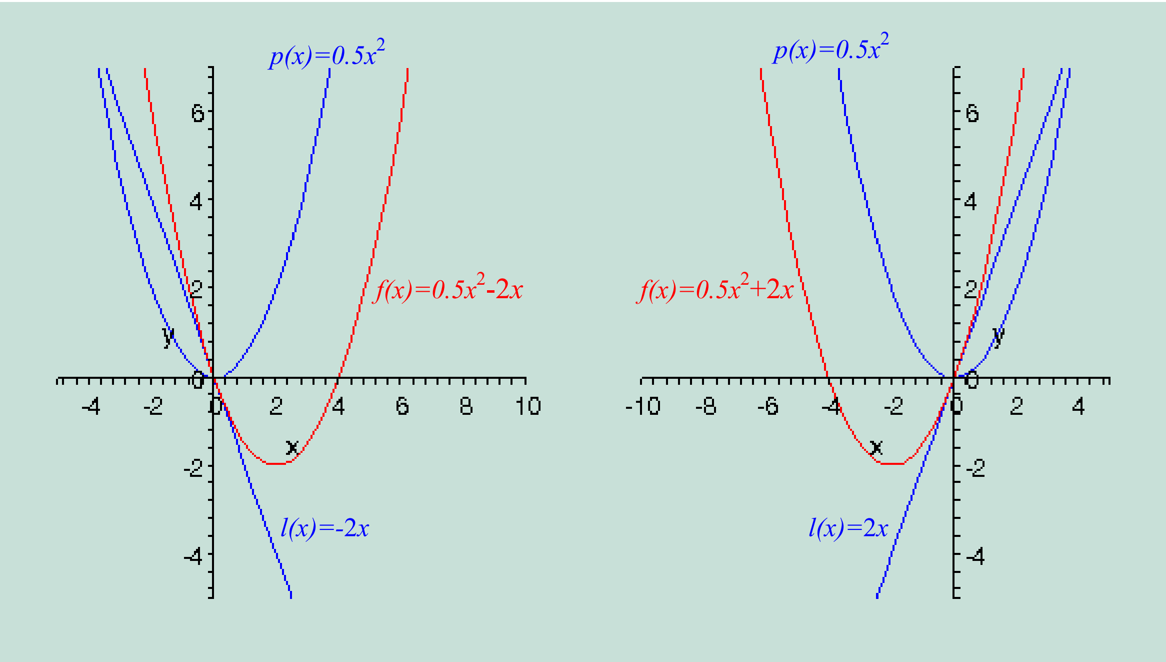
הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx$ כסכום

נחזור שוב אל הרעיון של חיבור פונקציות מונומיאליות, ונחבר את שתי הפונקציות הבאות:

$$p(x) = ax^2$$

$$l(x) = bx$$

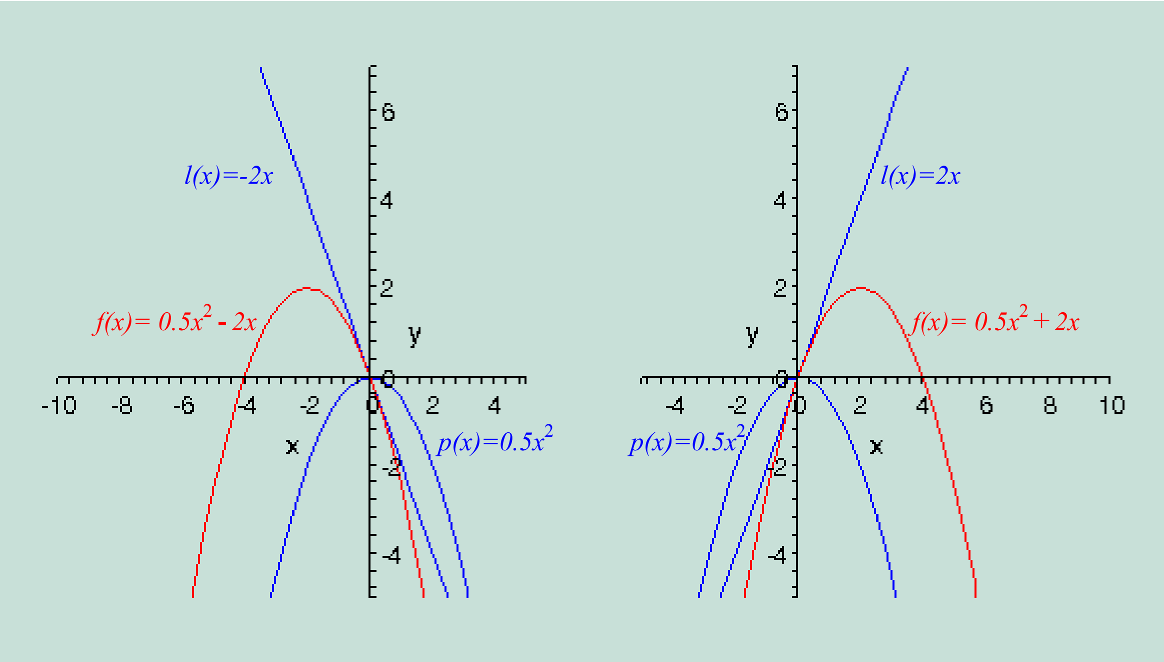
הואיל והפרבולה p היא ישרה או הפוכה וקודקודה בראשית, והואיל והקו הישר l עולה או יורד דרך הראשית, לכן, איכותית, קיימים ארבעה צירופים עבור הסכום $f = p + l$ (שרטוטים מס' 14, 15, 16, 17). השרטוטים מראים שקו ישר העובר דרך הראשית, כאשר מוסיפים לו פרבולה סימטרית יחסית לציר y עם קודקוד בראשית, מהווה מעין "נווט" לפרבולה, המעביר אותה למיקום חדש במערכת הצירים. שתי הזרועות האינסופיות של הפרבולה נמשכות כביכול, האחת כלפי מעלה והשנייה כלפי מטה, והקודקוד "גולש" כלפי מעלה או מטה מנקודת הראשית בכיוון המותווה על ידי הקו הישר. הגרף החדש עובר דרך הראשית ומונח כולו בצד אחד של הקו הישר.



שרטוט מס 14 שרטוט מס' 15

ליתר דיוק, שרטוט מס' 14 ושרטוט מס' 15 מדגימים את העובדה שעבור כל פרבולה "ישרה" ברביע שבו הקו הישר l מקבל ערכים חיוביים, הסכום של השניים נראה כאילו הוא תוצאה של כך שהקו הישר "מותח" את הפרבולה כלפי מעלה נקודה נקודה, וכל נקודה בשיעור שונה. הפונקציה החדשה f חייבת לקבל ברביע זה ערכים חיוביים, והגרף שלה עובר **מעל** שני המחוברים. ברביע שבו הקו הישר מקבל ערכים שליליים, הוא כביכול מותח כלפי מטה את הפרבולה נקודה נקודה. ולכן גרף פונקציית-הסכום החדשה עובר **בין** שני המחוברים.

באופן דומה, שרטוט מס' 16 ושרטוט מס' 17 מראים שעבור כל פרבולה "הפוכה" p, ברביע בו הקו הישר l מקבל ערכים שליליים, זרוע אחת של p "נמתחת" כלפי מעלה וגרף פונקציית-הסכום עובר **מתחת** לשני המחוברים. ברביע בו הקו הישר מקבל ערכים חיוביים הוא "מותח" כלפי מטה את הפרבולה כמו חבל אינסופי גמיש, וגרף פונקציית-הסכום עובר **בין** שני המחוברים.



שרטוט מס' 17

שרטוט מס 16

חפיפת הפרבולות

לפני שנוסיף לשני המחוברים לעיל, מחובר שלישי מהצורה $h(x) = c$, נשים לב שהפרבולה $p(x) = ax^2$ והפרבולה $f(x)= ax^2 + bx$ חופפות. לתלמידים, כמובן, הסתכלות זו דורשת בדיקה אלגברית קפדנית של הקשר הכמותי בין $f(x) = ax^2 + bx$ ו - $f(x) = a(x + R)^2 + S$ עבור ערכים של R ו- S שאותם הם צריכים לאתר (במקרה זה $S = -b^2/4a$; $R = b/2a$).

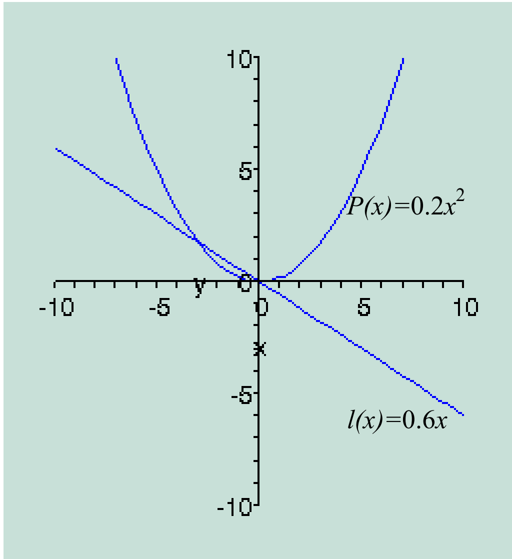
הואיל ו- $f(x)$ הנ"ל היא מהצורה $f(x) = ax^2 + c$, חפיפתה ל- $p(x)$ מספקת את הנימוק הדרוש.

הפונקציה $f(x) = ax^2 + bx + c$ כסכום

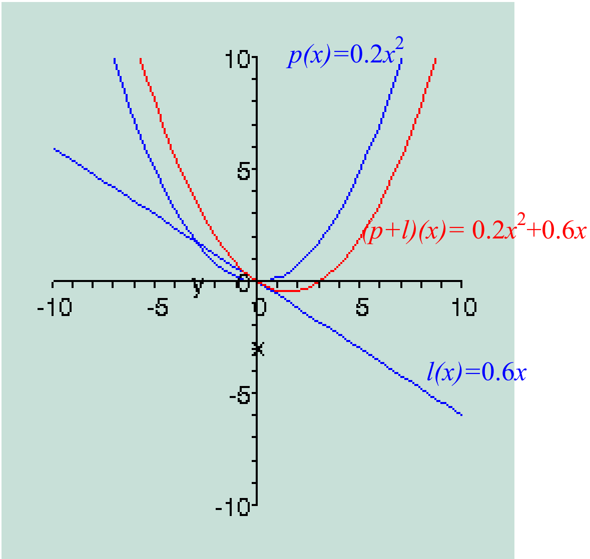
להשלמת התמונה, נוסיף עתה לסכום של $p(x) = ax^2$ ו- $l(x) = bx$ מחובר שלישי מהצורה $h(x) = c$. כתוצאה מכך נקבל הזזה של גרף פונקציית-הסכום $p + l$ כלפי מעלה או מטה, ולתוצאה יהיו אפס, אחת או שתי נקודות חיתוך עם ציר x.

נתייחס למקרה הכללי של הפונקציה הריבועית מהצורה $f(x) = ax^2 + bx + c$, המוגדרת לכל x. אם נסתכל עליה כסכום של שלוש פונקציות מונומיאליות: פרבולה מהצורה $p(x) = ax^2$, קו ישר מהצורה $l(x) = bx$, קו אופקי מהצורה $h(x) = c$, נוכל למקם במערכת הצירים את גרף פונקציית-הסכום במהירות ובקלות בעזרת סימנים של a, b, c ועל פי הערך המוחלט של a ו- c יחסית ל-1. לדוגמה: כדי לתאר את גרף הפונקציה $f(x) = 0.2x^2 - 0.6x - 3$ נצייר בדמיוננו פרבולה $p(x) = 0.2x^2$ ישרה (כי $a > 0$) ורחבה (כי $|a| < 1$) "נמשכת" כלפי מטה לצד ימין על ידי הקו הישר $l(x) = -0.6x$ שהוא קו יורד ($b < 0$) לאט (כי $|b| < 1$) (שרטוט מס' 18). כתוצאה מכך מתקבלת פרבולה ישרה העוברת דרך הראשית ויש לה נקודת חיתוך נוספת עם ציר x עבור ערך חיובי של x. לפיכך יש לה מינימום המתקבל עבור ערך חיובי של x (שרטוט מס' 19).

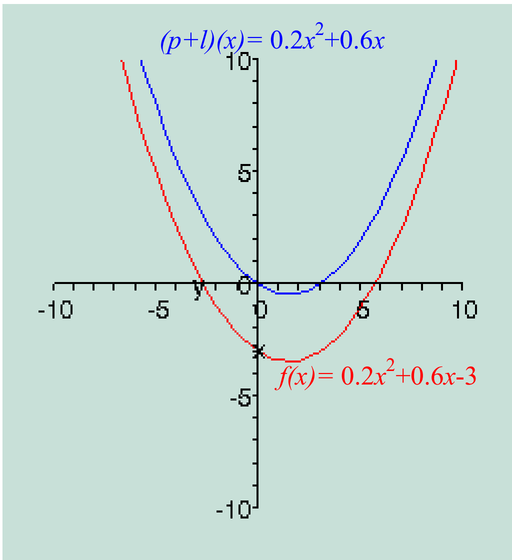
המחובר השלישי $h(x) = -3$ "מזיז" את הגרף כלפי מטה במקביל לציר y. לכן הפרבולה המבוקשת פתוחה כלפי מעלה, חותכת את ציר y מתחת ל-0, בעלת ערך שלילי מינימאלי המתקבל עבור ערך חיובי של x, ושתי נקודות 0 : אחת חיובית והשנייה שלילית (שרטוט מס' 20).



שרטוט מס 18



שרטוט מס' 19



שרטוט מס' 20

הקשר בין גישתנו לבין "השלמה לריבוע שלם"

קל לראות ששלוש הפרבולות $p(x) = ax^2,\ (p+l)(x) = ax^2 + bx\ ,\ f(x) = ax^2 + bx + c$ הן פרבולות חופפות. לשם כך מספיק להתבונן בווקטור (R , S) המחבר את הקודקודים של $p(x) = ax^2$ ושל $f(x) = ax^2 + bx + c$. ווקטור זה, מציין את הכיוון והגודל של ההעתקה המעתיקה את $p(x)$ ל- $f(x)$. הוא גם מחזיר אותנו לגישה המסורתית של "השלמה לריבוע שלם" מאחר ש- $R = -b/2a$; $S = (4ac - b^2)/4a$

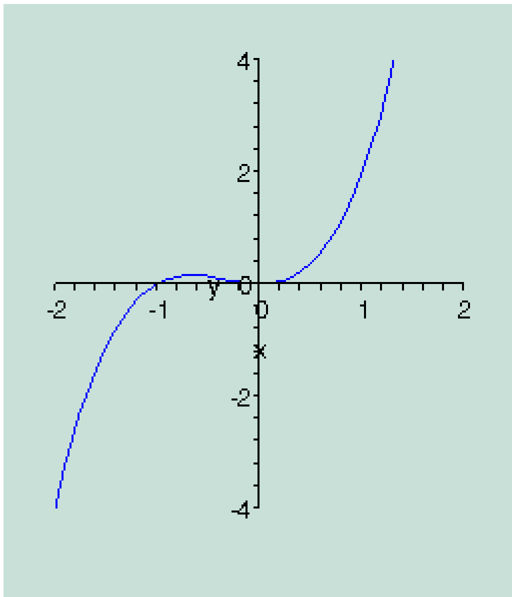
דיון

מאמר זה בא להציע שלא לשמור בבידוד הדדי את שני המקרים הראשונים של הפונקציות הפולינומיאליות. יתר על כן, הוא מצביע על כך שניתוק שני הנושאים זה מזה כרוכה בהפסד הן מההיבט המתמטי והן מההיבט הדידקטי.

בהמשך לימוד האלגברה כאשר דנים בתכונות של הפונקציות הריבועיות, עוסקים בפתרון משוואות ריבועיות, מערכות של משוואות, או אי-שוויונים ריבועיים, אפשר להפיק תועלת רבה מהיכולת לתאר בקלות ובמהירות את הגרף בכל רגע שהוא רצוי ונחוץ. גם שיטת פירוק הפולינום הריבועי למכפלה של שתי פונקציות ליניאריות, במקרה הצורך עם תוספת של קבוע שמזיז את הגרף הפריק אל הגרף הרצוי, וגם שיטת פיצול הפולינום הריבועי לסכום של שלושה מונומים, מתאימות ליצירה של תמונה מנטאלית של גרף הפונקציה.

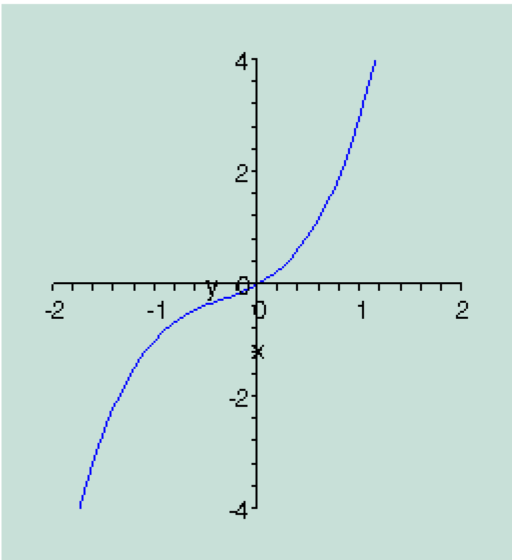
את שני התהליכים שתוארו במאמר ניתן להתאים לפולינומים ממעלה גבוהה יותר. הם מספקים דוגמאות של תהליכים בני הכללה. כך לדוגמה אפשר לשאול: איזה מידע נוכל להסיק מהגרפים של שלוש פונקציות ליניאריות עבור הגרף של מכפלתן? איך זה שהגרף של $f(x) = x^3$ נראה כפי שהוא נראה ואיך בהשוואה אליו נראים הגרף של הפונקציה $f(x) = x^3 + x^2$ (שרטוט מס' 21) והגרף של הפונקציה $f(x) = x^3 + x^2 + x$ (שרטוט מס' 22)?

$f(x) = x^3 + x^2$



שרטוט מס' 21

$f(x) = x^3 + x^2 + x$



שרטוט מס' 22

הפרק על פולינומים מדרגות גבוהות יותר, שכרגע נמצא מחוץ לתוכנית הלימודים של בית-ספר תיכון, יכול להפוך לנושא מרתק בתוכנית הלימודים בעדן שבו זמינותם של הגרפים אינה מהווה בעיה הודות לתוכנה הקיימת למחשבים. אפשר לשלבם ולהשתמש בהם על מנת לפתח תמונה מנטאלית של הפונקציות השונות כאמצעי עזר לאינטואיציה מתמטית הדרושה לטיפול בפונקציות. כיוון ש"ראיית" האלגברה נעשתה בימינו אפשרית הודות למחשבים, ניתן להיעזר בהם לתפקוד אלגברי משמעותי ולא רק טכני.

הכלי החזותי לא מהווה רק כלי עזר להדגמה סטטית. הוא יכול גם לשמש כסביבה שמעוררת בעיות. סביבה כזאת מוליכה ללמידה המדורבנת על ידי חיפוש תשובות לשאלות המתעוררות. דרך למידה זאת אופיינית לאדם משחר ילדותו. יתר על כן, השימוש בגרפיקת מחשב לגילוי תכונות של פונקציות שונות טומן בחובו הרבה מאוד הפתעות מתמטיות.

(דיון יותר רחב על ערכה של הלמידה לקראת תשובה לשאלה שמתעוררת בלומד ועל ערכה של ההפתעה בלימוד מתמטיקה מופיע ב: *a*-1988 *b*-1988 Movshovitz-Hadar).

הפונקציות הפולינומיאליות הן הפונקציות הפשוטות ביותר שאפשר לבנות, אך למרות פשטותן ואולי בשל פשטותן הן בעלות תפקיד מרכזי מאוד במתמטיקה. חלקים אחדים באלגברה של תורת הפולינומים הם מאוד עמוקים. המשפט היסודי של האלגברה מהווה דוגמה לכך. לפונקציות פולינומיאליות יש חשיבות גדולה גם באנליזה שהרי בעזרתן ניתן להגיע לקירובים של פונקציות מסובכות ביותר במגוון של דרכים. זאת הסיבה לכך שלימוד פונקציות פולינומיאליות משחק תפקיד כה מרכזי בתוכנית הלימודים במתמטיקה, ולכן גם לימוד הפונקציות הליניאריות והריבועיות הוא כל כך בסיסי. ללמד אותן כשני נושאים נפרדים אשר אין ביניהם לבין עצמם קשר ואין הם מובילים לפיתוח רעיונות מתקדמים על פולינומים בכלל, זוהי על כן החמצה של ממש.

קשה להפריז בהדגשת החשיבות של ההצגה החזותית לפיתוח האינטואיציה המתמטית. הניתוח האיכותי המתאפשר על ידי הייצוגים החזותיים הוא שעושה את כל ההבדל בין הגישה המסורתית להוראת הפונקציה ממעלה שנייה לבין הגישה שמוצעת במאמר הנוכחי. בדרך כלל שולטים בהוראת המתמטיקה ובפרסומים מתמטיים בכתב השיקולים הכמותיים. שיקולים איכותיים הם נדירים מאוד. באופן פרדוכסלי, דווקא ההתמקדות בחלק האיכותי של הארגומנטים הכמותיים הופכת אותם בדרך כלל למובנים יותר עבור קהל יותר רחב.

הדיון האיכותי בפולינומים ממעלה ראשונה ושנייה, כפי שהוצג במאמר זה, אמור להוכיח את עצמו כהשקעה שתניב פירות בבוא העת כאשר יתחיל לימוד החשבון הדיפרנציאלי, גיאומטריה אנליטית, ואלגברה מודרנית.

ל"תחושה בקצות האצבעות" של הפולינומים ממעלות נמוכות יכולות להיות השלכות משמעותיות לגבי המשך לימוד המתמטיקה. היכולת להעלות בדמיון את המראה של גרף הפונקציה היא משענת חשובה כאשר יש לבצע משימות מתמטיות יותר מתקדמות.

מחשבות אחדות בכיוון מחקר

תוך כדי עבודה על מאמר זה, התעוררו בי שאלות רבות שראויות להיחקר:

- מהם התהליכים הקוגניטיביים והמטקוגניטיביים (Garofalo and Lester 1985) הכרוכים בטיפול האיכותי בפולינומים לפי המתואר לעיל?
- זסלבסקי (Zaslavsky 1987) מצאה דפוסים של תפיסות מוטעות הקשורות למעבר הד-צדדי בין הייצוג האלגברי לבין הייצוג הגראפי של הפונקציות הריבועיות? האם המאמר הנוכחי מסייע להתגבר עליהן או למנוע אותן?
- ז'אנבייר (Janvier 1987) מציע אנלוגיה בין ייצוג פונקציה כמושג מתמטי בתפיסת התלמידים לבין קרחון דמוי כוכב מחומש שרק אחת מפינותיו נראית מעל למים ברגע מסוים. הכוכב שלו הוא בעל חמש זרועות המכילות את הסכמות הבאות כרכיבים של ייצוג הפונקציה: עצם, טבלה, גרף, תיאור מילולי ונוסחה. בכל פעם, ועל-פי רצוננו, רכיב אחד נגלה וארבעת האחרים נסתרים. במובן זה, מה מוסיפים הרעיונות המוצגים במאמר זה לייצוג של פונקציות ריבועיות בתפיסת התלמידים? האם

הם עוזרים להחליק את המעבר בין סכימת שונות? האם הם עוזרים לסובב את הקרחון המחומש של ז'אנבייר ביתר קלות?

- איזה סוג של פיתוח תוכנית לימודים יכול להגשים את הרעיונות שלעיל ולהביאם לכיתה? באיזו מידה הערכה של ניסוי כזה תעשה צדק לפוטנציאל התיאורטי שיש לרעיונות אלה להתפתחותו המתמטית של הלומד? איך ניתן להשוות את הגישה המוצעת לגישה המסורתית? איזו כמות של למידה אוטונומית ניתנת לביצוע בגישתנו תלוית-המחשב? באיזו מידה, הגישה המקשרת בין הפולינומים ממעלה ראשונה ושנייה תביא את התלמידים להתייחס למתמטיקה כאל דיסציפלינה שניתנת לבנייה ויצירה ו"שייכת להם", ולא כאל דבר מוגמר שמישהו אחר הכין? מהי הפרדיגמה המתאימה למחקר חינוכי מסוג זה (Howe 1985)?
- לאיזה סוג של מורים (למשל, לפי האפיונים של Thompson 1984) יש היכולת ליצור לעצמם תמונה מנטאלית של הפולינומים הריבועיים? מהי ההשפעה של יכולתם זאת על תפישתם הם של האלגברה הכרוכה בכך? ועל תפישתם של תלמידיהם?
- במקום אחר (Movshovitz-Hadar 1988*a*), תיארתי אנלוגיה בין מלחין ומבצע בהתאם לתפקידם במוסיקה לבין מתמטיקאי ומורה למתמטיקה בהתאם לתפקידם במתמטיקה. מורים מומחים הם היום מוקד למחקר (Leinhardt and Putnam 1986 , Brophy 1986, Bourke 1985, Berliner 1986).
במיוחד מעניינות דרכיהם של המומחים "לנגן" את "המוסיקה המתמטית", כך שהיא תסבר את אוזנו של התלמיד. בהשתמשם בסביבה לימודית פתוחה תלויית-מחשב כפי שמוצע במאמר זה, מורים מומחים עושים לא רק "נגינה לפי התווים". הם "מאלתרים" בהתאם לתגובת הקהל ובהתאם לטעמם המתמטי. הם מאפשרים לתלמידים לנסות רעיונות משלהם תוך לקיחת סיכון קטן של היווצרות תפיסות מוטעות. איך פועלים המורים המתחילים? מה הם יכולים ללמוד מהמומחים?
- אחרון חביב, מה צריכות להכיל תוכניות לימוד להכשרת פרחי-הוראה על מנת לשפר את כשרון האלתור? מה משמעות הדבר: לעודד את הקונסטרוקטיביזם אצל המורה העתידי? Underhill (1986) פרש יריעה רחבה בעניין, ומאמר זה מציע רעיונות אחדים הראויים ליישום, אך נחוץ מחקר קפדני בשאלות אלו ואחרות, אם ברצוננו לראות השפעה של המחקר על החינוך המתמטי בהתקרבנו אל העשור האחרון של המאה.

מקורות

Arbel, Amnon and Movshovitz-Hadar Nitsa, (1988): *Descriptive Analysis*. IBM-PC Software and learning Materials, Logal, Kiryat-Shmona, 10200, Israel.

Berilner, David C. (1986): In Pursuit of the Expert Pedagogue, *Educational Researcher*, August /September issue pp. 5-13.

*B*ourke, S. F. (1985): The Study of Classroom Contexts and Practices. *Teaching and Teacher Education*, Vol. 1, No. 1, pp. 33-50.

Brophy, Jere (1986): Teaching and Learning Mathematics: Where Research Should Be Going? *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 17, No. 5, pp. 323-346.

Davis, Robert B. and Henkin Leon (1978): Aspects of Mathematics Learning That Should Be the Subject of Testing. In: T*esting, Teaching and Learning*. A Report of a Conference on Research Testing, NIE pp. 26-48.

Garofalo, Joe and Lester, JR., Frank K. (1985): Metacognition, Cognitive Monitoring and Mathematical Performance, *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 16, No. 3, pp.163-176.

Henkin Leon and Davis, Robert B. (1978): Inadequately *t*ested Aspects o*f* Mathematics Learning. In: *Testing, Teaching and Learning.* A Report of a Conference on Research Testing, NIE pp. 49-63.

Howe, Kenneth, R. (1985): Two Dogmas of Educational Research, *Educational Researcher*, October 1985, pp. 10-18.

Janvier Claude (1987): Representation and Understanding: The Notion of Function as an Example. in: Janvier C. (Ed.): *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics* Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, N.J., pp. 67-71.

Kilpatrick Jermey (1987): What Constructivism Might Be In Mathematics Education? In *B*ergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11thInternational conference PME-XI*. Montreal, pp. 3-27.

Leinhardt *G*aea and Putnam, Ralph R. (1986): Pro*f*ile of Expertise in Elementary School Mathematics Teaching, A Research Report. *Arithmetic Teacher*, December 1986, pp. 28-29.

Lorch Edgar L. (1973): *Precalculus – Fundamentals of Mathematical Analysis*. W.W. Norton and *c*ompany, Inc. New-*Y*ork (pp. 70-82).

Movshovitz-Hadar Nitsa, (1988a): Stimulation Presentations of Theorems Followed by Responsive Proofs. *For the Learning of Mathematics*, Vol. 8, No. 2, pp. 12-30.

Movshovitz-Hadar Nitsa, (1988b): School Mathematics Theorems – an Endless Source of Surprise. *For the Learning of Mathematics,* Vol. 8, No. 3.

Sinclair Herminie (1987): *c*onstructivism and the *p*sychology o*f* Mathematics. In: *B*ergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11thInternational conference PME-XI*. Montreal, pp. 28-41.

Thompson, Alba Gonzalez, (1984): The Relationship of teachers conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice, *Educational Studies in Mathematics 15*, pp. 105-127.

Underhill, Robert *g*., (1986): *Mathematics teacher Education: a constructivist perspective*, *p*aper presented to the *d*iscussion *g*roup on the *p*sychology o*f* *t*raining *p*racticing *t*eachers o*f* Mathematics, PME 10, *L*ondon 1986. 20 pages.

Vergnaud *G*erard (1987): About Constructivism. In: *B*ergeron J. Herscovics N. & Kieran *c*. (Eds.) *Proceedings of the 11thInternational conference PME-XI*. Montreal, pp. 42-54.

Wheeler David (1987): The World o*f* Mathematics. In: *B*ergeron J. Herscovics N. & Kieran C. (Eds.) *Proceedings of the 11thInternational conference PME-XI*. Montreal, pp. 55-70.

Zaslavsky Orit, (1987): *Conceptual Obstacles in the learning of Quadratic functions* Unpublished doctoral dissertation, Technion, Department o*f* Education in Science and *t*echnology.