

"קשר-חס": לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי

הנושא: ראייה מרחבית - מבנים מינימליים ומקסימליים

הוכן ע"י: רותי רייז.

תקציר: בחומר מובאת הצעה לייצוג של מבנים קובייתיים תלת-מימדיים בצורה דו-מימדית ולהיפך: קבלת מבנה(ים) תלת-מימדי(ים) מייצוג דו-מימדי, שמוביל לשאלה על מספר המבנים התלת-מימדיים המתקבלים מייצוג דו-מימדי ובפרט קבלת המבנה המקסימלי והמבנה(ים) המינימלי(ים).

מילות מפתח: ראייה מרחבית, מבנה מינימלי/מקסימלי, תרשים מספרי, תרשים מבטים, מחשב, תוכנה, לומדה.

נכתב עפ"י: (1) יחידת הלימוד "ראייה מרחבית", שנכתבה ע"י דוד בן-חיים, במסגרת פרויקט "מסמטיקה", הטכניון.
(2) תוכנת מחשב "ראייה מרחבית", שנכתבה ע"י תמר ברקמן ורותי רייז, פרויקט "מסמטיקה", הטכניון.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חס" בחיפה, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ד, ינואר 1994.
"קשר-חס" בתל-אביב, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ד, ינואר 1994.
"קשר-חס" בבאר-שבע, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"ד, פברואר 1994.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 9 עמודים.

ראיה מרחבית - מבנים מינימליים ומקסימליים

א) חשיבות ה"ראיה המרחבית"

יכולת הראיה המרחבית נחשבת לאחד משני המרכיבים הראשיים של היכולת המרחבית (המרכיב השני הוא אוריינטציה מרחבית).

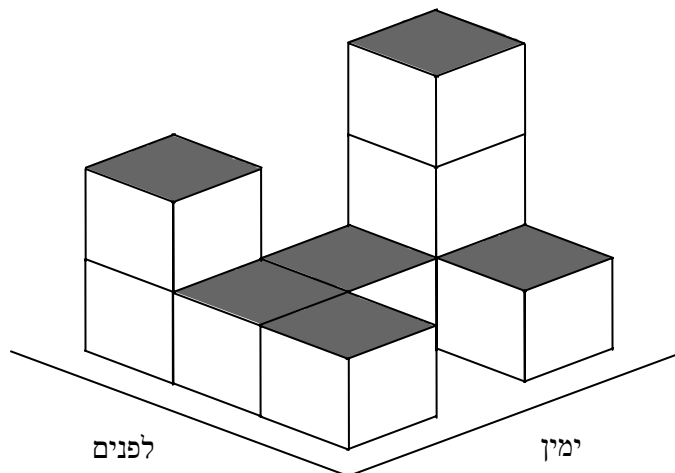
ראיה מרחבית מייצגת את היכולת לדמיין מראה של גופים, תזוזה או שינוי בגופים עצמם, או שינויים בתכונותיהם - בדרך כלל על-פי צורות ותמונות של הגופים. במונחים מתמטיים, ראיה מרחבית דורשת שאובייקטים יעברו (בדמיון) סיבוב, שיקוף ו/או הזזה. כל אלה הם רעיונות חשובים מתחום המתמטיקה בכלל ומתחום הגיאומטריה בפרט.

מספר רב של ממצאים בתחום המחקר תומכים בקשר בין ראיה מרחבית ובין מתמטיקה ומקצועות מדעיים אחרים. לעיתים נעזרים ביכולת זו כדי לנבא הצלחה במקצועות טכניים ובנושאים הנלמדים בביה"ס.

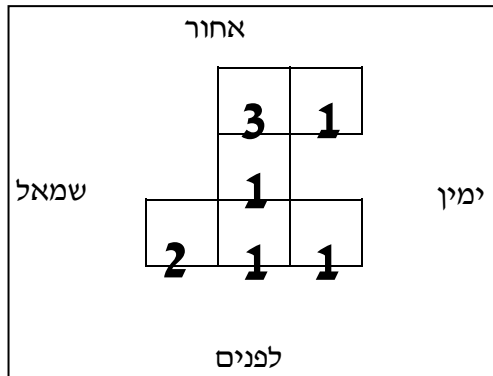
סיבה נוספת לחשיבות ההשקעה בפיתוח יכולת הראיה המרחבית באופן כללי, נעוצה בממצאים רבים המצביעים על הבדלים בין המינים ביכולת זו, כאשר הישגי הבנים במשימות כאלה גבוהים בדרך כלל מאלה של הבנות.

ב) תאור מבנה תלת-מימדי באמצעות "תרשים מספרי"

1) כיצד היית מתאר(ת) לחברך את המבנה התלת מימדי הבא, הבנוי כולו מקוביות (מבלי שחברך יכול לראותו):



2) אחת ההצעות היא לתאר את המבנה התלת-מימדי בסכימה דו-מימדית בצורה הבאה:



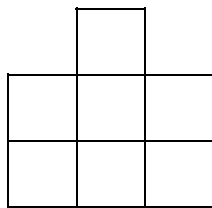
נקרא לסכימה זו "תרשים מספרי".
התרשים המספרי מתאר את בסיס המבנה של הקוביות (רק אלה הנוגעות בקרקע), כאשר בכל ריבוע רשום מספר הקוביות שיש לשים עליו.

ג) "תרשים מבטים"

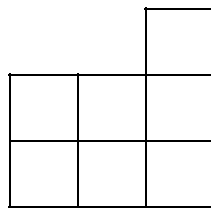
- ניתן לקבל סרטוט של גופים תלת-מימדיים (הבנויים מקוביות) עפ"י סרטוטיהם הדו-מימדיים. סרטוטים דו-מימדיים אלה נקראים "תרשים מבטים".
- "תרשים המבטים" מורכב מ: (1) תרשים הבסיס.
(2) מבט של המבנה מימין (שקובע גם את המבט משמאל).
(3) מבט של המבנה מלפנים (שקובע גם את המבט מאחור).

הערה: רישום המבט מכל צד נעשה תמיד מימין לשמאל.

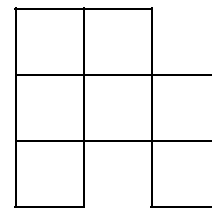
לדוגמא: נתון "תרשים המבטים" הבא:



מבט מלפנים

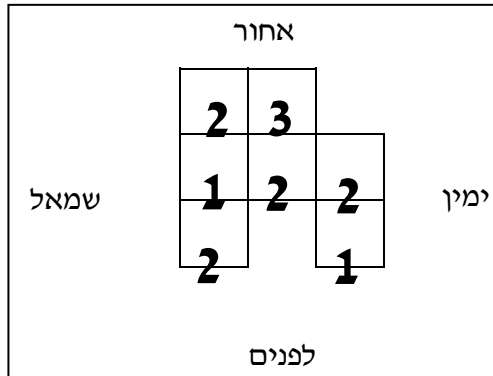


מבט מימין



תרשים הבסיס

מ"תרשים מבטים" זה ניתן לבנות, למשל, את מבנה הקוביות שמתואר ע"י "התרשים המספרי"
הבא:

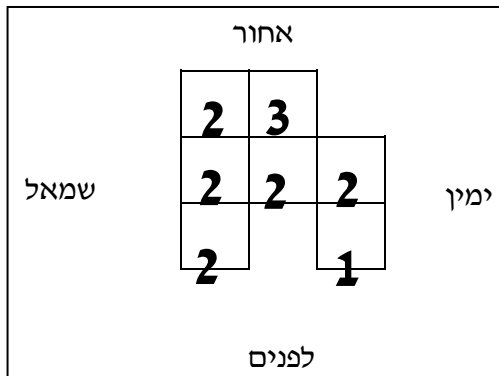


תרשים א'

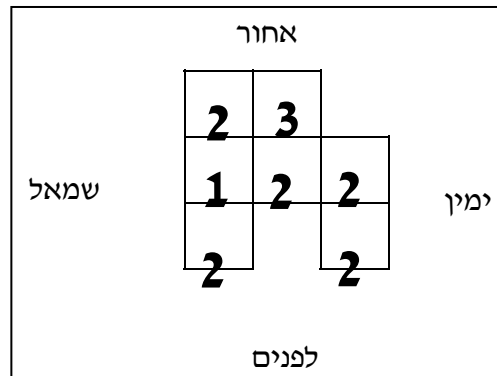
ד) קבלת מבנים קובייתיים נוספים מאותו "תרשים מבטים"

1) האם למבנה הקובייתי שקיבלנו בסעיף ג' ניתן להוסיף קוביות, כך שגם המבנה החדש יתאים ל"תרשים המבטים" הנתון בסעיף זה?

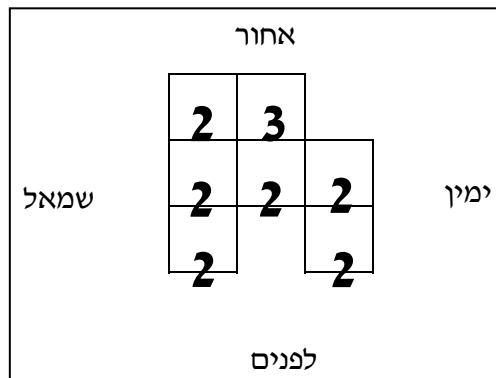
התשובה היא כן. להלן "תרשימים מספריים" של מבנים אפשריים:



תרשים ג'



תרשים ב'



תרשים ד'

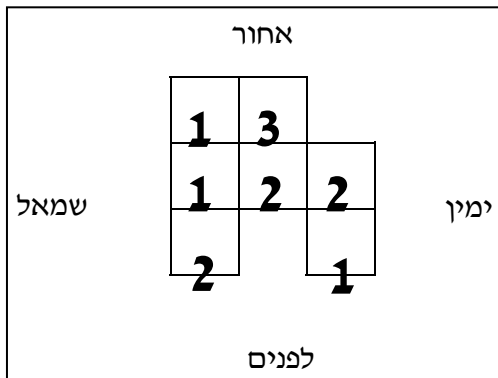
2) נמנה את מספר הקוביות שבכל אחד מן המבנים המתאימים ל"תרשים המבטים" הנתון בסעיף ג':

מספר הקוביות במבנה	התרשים המספרי
13	א'
14	ב'
14	ג'
15	ד'

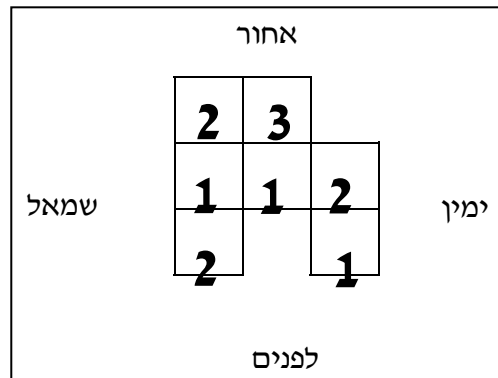
3) המספר המקסימלי של קוביות שניתן לשים במבנה, כך ש"תרשים המבטים" הנתון בסעיף ג' עדיין יתאר אותו, הוא במקרה זה 15 קוביות ומתקבל במבנה ד'. לכן, מבנה זה נקרא המבנה המקסימלי המתאים לתרשים המבטים הנתון.

ה) מבנים מינימליים

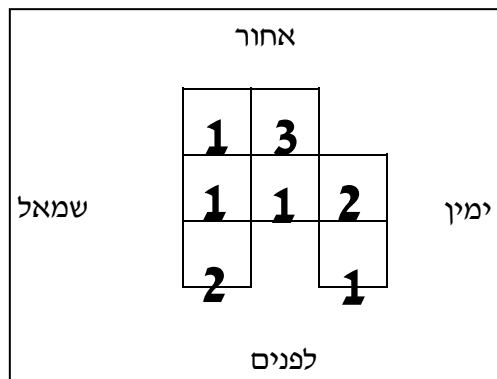
1) האם מן המבנה הקובייתי שקיבלנו בסעיף ג' ניתן להוריד קוביות, כך שהמבנה החדש יתאים ל"תרשים המבטים" הנתון בסעיף זה? התשובה היא כן. להלן "תרשימים מספריים" של מבנים אפשריים:



תרשים ו'

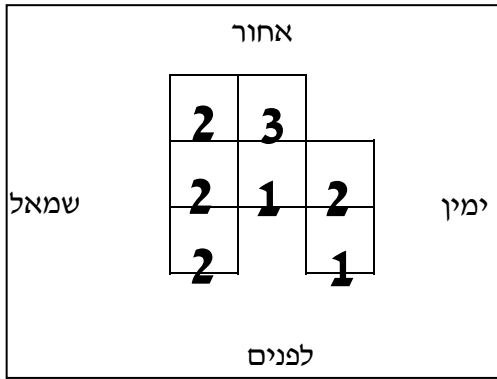


תרשים ה'

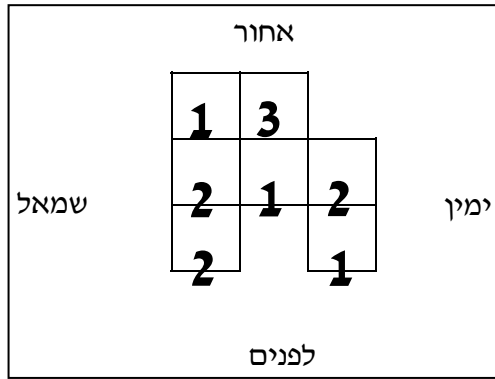


תרשים ז'

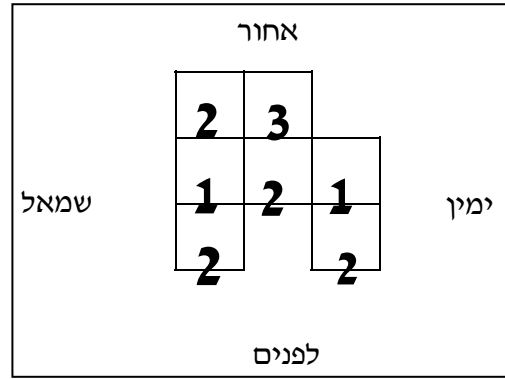
2) קיימים מבנים נוספים המתאימים ל"תרשים המבטים" הנתון בסעיף ג'. אחדים מהם מתוארים ע"י ה"תרשימים המספריים" הבאים:



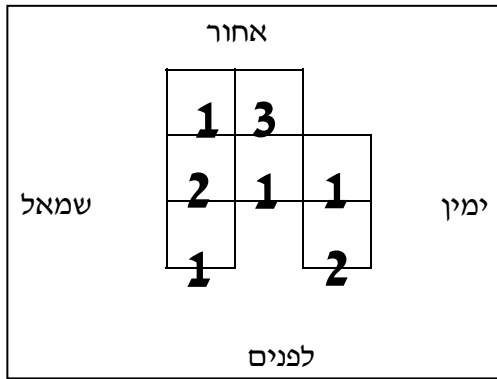
תרשים י'



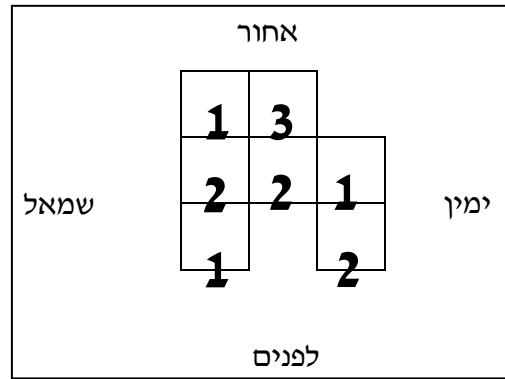
תרשים ט'



תרשים ח'



תרשים י"ב



תרשים י"א

3) נמנה את מספר הקוביות שבכל אחד מן המבנים המתאימים ל"תרשים המבטים" הנתון בסעיף ג':

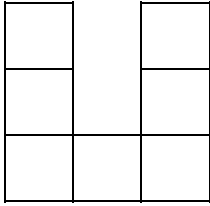
מספר הקוביות	התרשים
12	ה'
12	ו'
11	ז'
13	ח'
12	ט'
13	י'
12	י"א
11	י"ב

4) המספר המינימלי של קוביות שניתן לשים במבנה, כך ש"תרשים המבטים" הנתון בסעיף ג' עדיין יתאר אותו, הוא במקרה זה 11 קוביות ומתקבל במבנים ז', י"ב. לכן, מבנים אלו נקראים מבנים מינימליים.

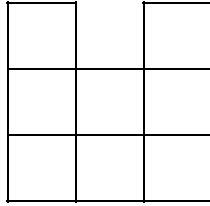
1) דוגמאות נוספות למבנים מינימליים/מקסימליים

בדוגמאות הבאות, לכל "תרשים מבטים" של מבנה, עליך :
(1) ליצור את כל ה"תרשימים המספריים" (או המבנים) האפשריים, המתאימים לו .
(2) לספור את מספר הקוביות בכל אחד מן המבנים, ולקבוע איזה מן המבנים הוא מבנה מינימלי ואיזה מן המבנים הוא מבנה מקסימלי.

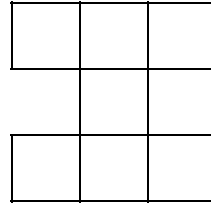
דוגמא 1 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

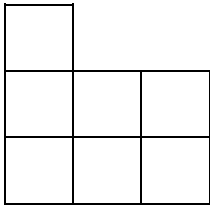


מבט מימין

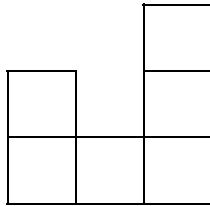


תרשים הבסיס

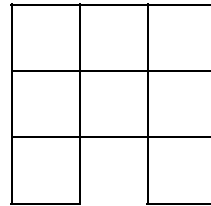
דוגמא 2 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

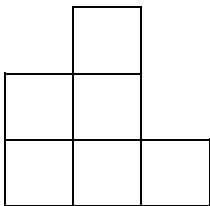


מבט מימין

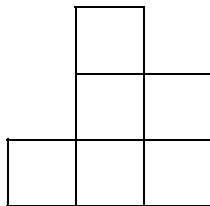


תרשים הבסיס

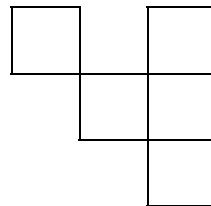
דוגמא 3 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

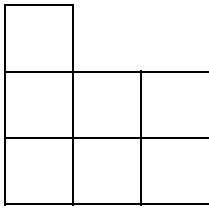


מבט מימין

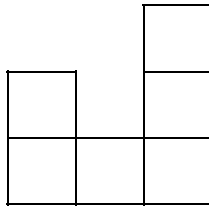


תרשים הבסיס

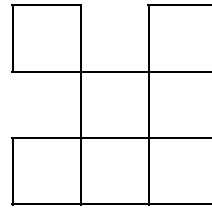
דוגמא 4 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

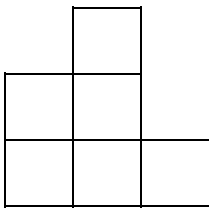


מבט מימין

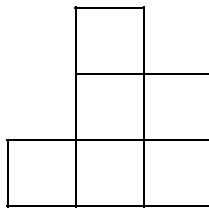


תרשים הבסיס

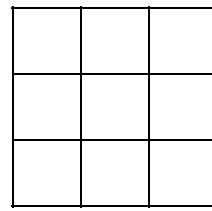
דוגמא 5 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

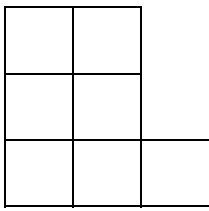


מבט מימין

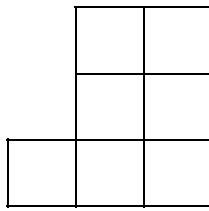


תרשים הבסיס

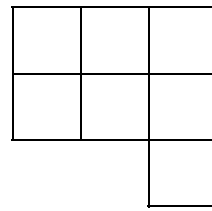
דוגמא 6 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

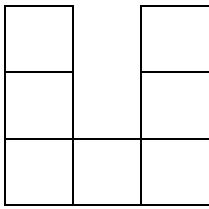


מבט מימין

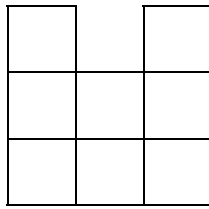


תרשים הבסיס

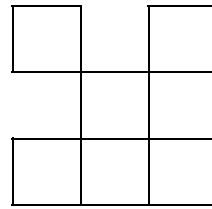
דוגמא 7 : "תרשים המבטים" הוא :



מבט מלפנים

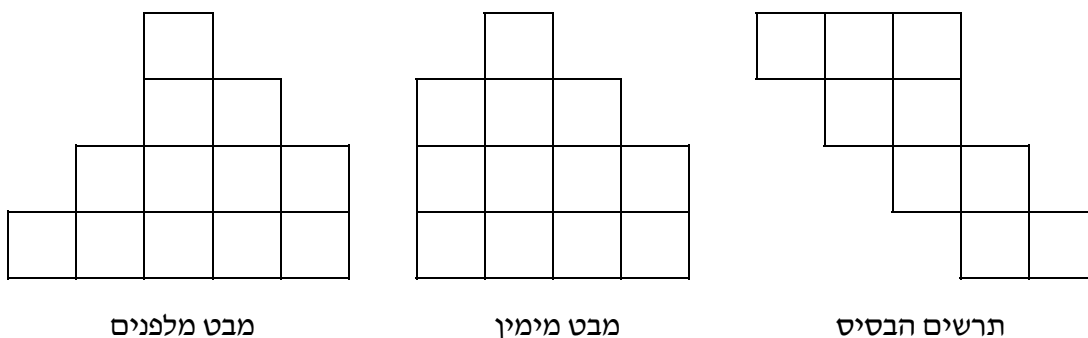


מבט מימין



תרשים הבסיס

דוגמא 8: "תרשים המבטים" הוא:



ז) תוכנת המחשב: "ראיה מרחבית"

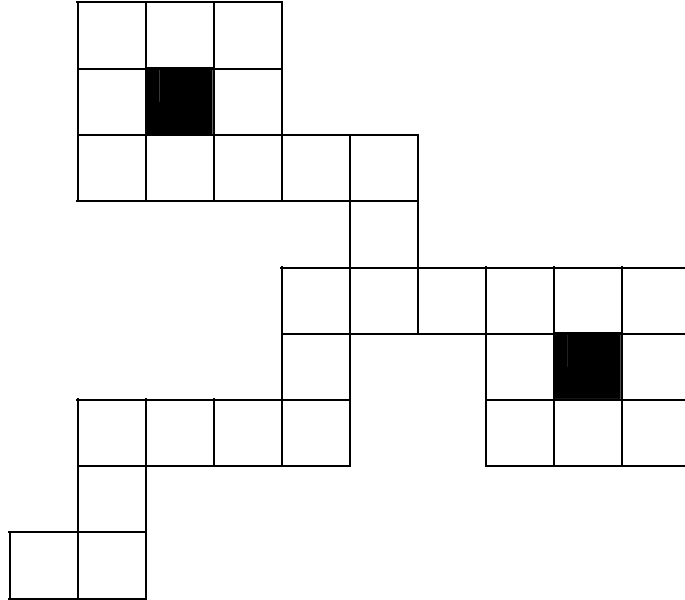
דוגמאות נוספות למבנים מינימליים ומקסימליים ניתן למצוא בתוכנת המחשב של פרויקט "מסמטיקה": "ראיה מרחבית", המצורפת ליחידת הלימוד, בסעיף "מבנים מינימליים ומקסימליים".

ח) מספר המבנים המקסימליים האפשריים ומספר המבנים המינימליים האפשריים

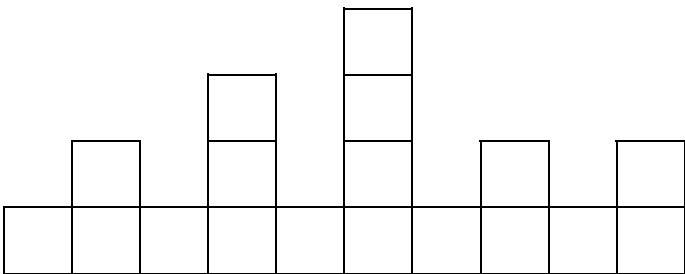
- 1) מן הדוגמאות שבסעיף ה' ומדוגמאות נוספות בתוכנה, ניתן להסיק כי מבנה מקסימלי יש רק אחד.
- 2) מן הדוגמאות שבסעיף ה' ומדוגמאות נוספות בתוכנה, ניתן להסיק כי יתכנו מקרים בהם יש מספר מבנים מינימליים.

ט) המבנה המסתורי - חפירות ארכיאולוגיות

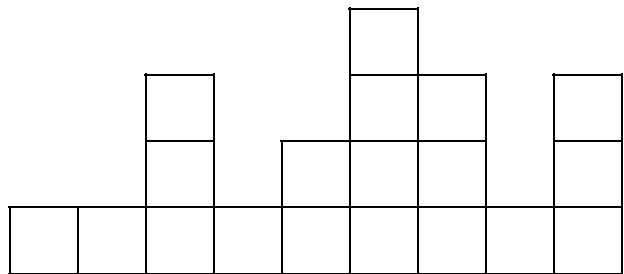
בחפירות ארכיאולוגיות אי שם בארץ גילו את מראה היסודות של מבנה מסתורי עתיק. המבנה היה בנוי מאבנים גדולות, כל אחת בצורת קובייה. לפניך סרטוט של היסודות (החלק הנוגע בקרקע) כפי שנראים מלפנים:



במקום מרוחק במעט מהיסודות, התגלו רישומים של מבטי המבנה המסתורי מהצדדים השונים ולאחר עבודה מאומצת הושלמו בצורה הנתונה הסרטוטים הבאים:



מבט מלפנים



מבט מימין

משימה א': עליך לבנות את המבנה המסתורי המקסימלי המתאים למבטים הנתונים ולערוך "תרשים מספרי" מתאים. מה מספר הקוביות הדרושות?

משימה ב': עליך לבנות מבנה(ים) מסתורי(ים) מינימלי(ים) שמתאי(מ)ם למבטים הנתונים ולערוך "תרשים מספרי" מתאים. מה מספר הקוביות הדרושות?