הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": לקידום שיפור וריענון החינוך המתמטי

הנושא: הוראת הנושא סדרות באמצעות המחשה גרפית

הוכן ע"י: משה קוקוס.

תקציר: בחומר מוצגת גישה להוראת נושא הסדרות באמצעות הצגתן כפונקציה a(n) המוגדרת על המספרים הטבעיים. מובאות דוגמאות של סדרות חשבוניות, סדרות הנדסיות וסדרות מעורבות. קיימת התייחסות לאיבר הכללי בסדרה ולסכום האיברים הראשונים/האחרונים של הסדרה, וכן לסדרות עולות/יורדות/קבועות.

מילות מפתח: אלגברה, סדרות, סדרה חשבונית, סדרה הנדסית, סדרה מעורבת, איבר כללי, סכום איברים, גרף של פונקציה, פונקציה ממעלה ראשונה, פונקציה מעריכית.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חם" בחיפה, סדנא שלישית בשנה"ל תש"ן, ינואר 1990.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 13 עמודים.

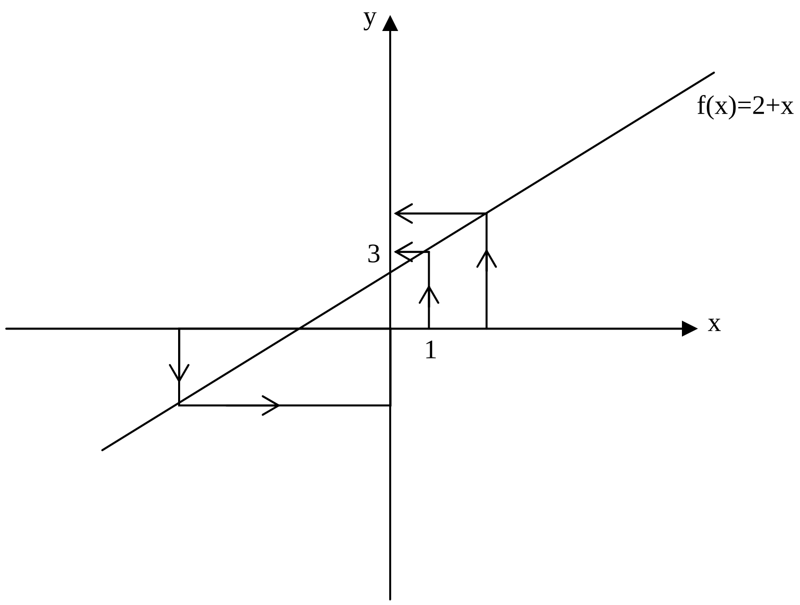
הוראת הנושא סדרות באמצעות המחשה גרפית

תצוגה גרפית של סדרות

הנושאים סדרה חשבונית וסדרה הנדסית נלמדים בכל שלוש הרמות של תכנית הלימודים לבגרות. כידוע, סדרה חשבונית מבוססת על הפרש קבוע בין כל איבר לקודמו בסדרה (פרט לראשון), ואילו סדרה הנדסית מבוססת על יחס קבוע בין כל איבר לקודמו בסדרה (פרט לראשון). תלמידי הרמות הגבוהות הן 5 יח"ל והן הטובים שב- 4 יח"ל מבינים את הנושא בקלות יחסית אם לשפוט לפי המהירות ומידת ההצלחה בה הם פותרים תרגילים. אולם, גם אצל אלה ועוד יותר אצל היותר חלשים, הנושא סדרות נתפס בעיקר כעיסוק בזיהוי של קבוצת האיברים המתנהגים כסדרה ובהמשך הצבה בנוסחאות אחדות ופתרון המשוואות האלגבריות המתאימות. מעטים התלמידים המבינים שלאמיתו של דבר הם עוסקים בפונקציה המוגדרת על קבוצת המספרים הטבעיים. אם רואים את הסדרה כפונקציה כזאת אפשר להמחיש את הסדרות כפונקציות על גבי מסך מחשב. הניסיון מלמד שגישה כזאת תורמת להעמקה של הבנת מהותן של סדרות וכתוצאה מכך גדלה יכולת ההתמודדות עם בעיות מסובכות יחסית.

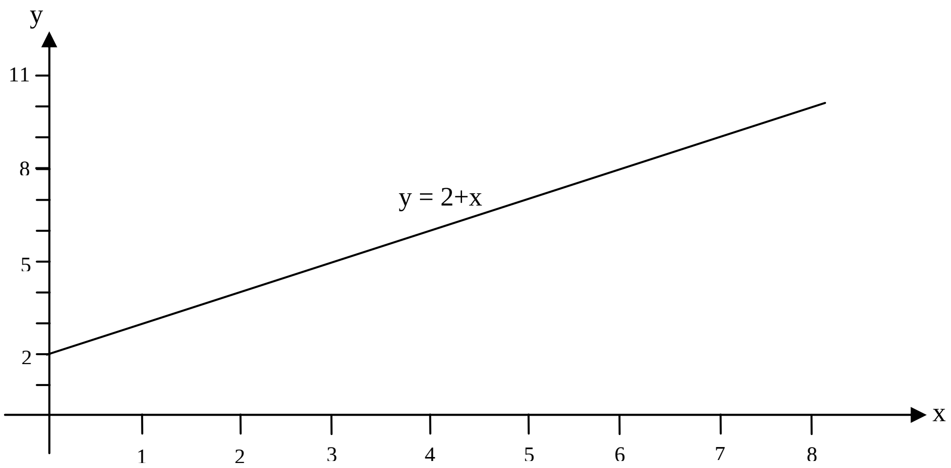
1. סדרה חשבונית

כדי לבנות סדרה חשבונית כפונקציה המוגדרת על המספרים הטבעיים, נצא למשל מהפונקציה $f(x) = 2 + x$ המוגדרת על קבוצת המספרים הממשיים. זוהי פונקציה לינארית המוגדרת לכל x ממשי. שיפועה שווה ל- 1, ו- $f(1) = 3$ (גרף מס' 1).



גרף מס' 1

נגביל את עצמנו לערכים החיוביים של x בלבד (גרף מס' 2).

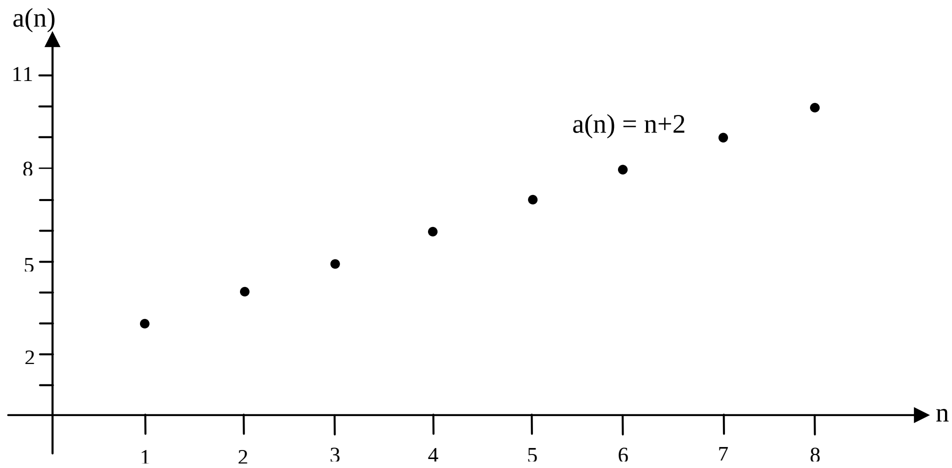


גרף מס׳ 2

נוסיף ונגביל את התחום למספרים הטבעיים בלבד (1, 2, 3, 4, …) כלומר נתייחס רק לערכים $f(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

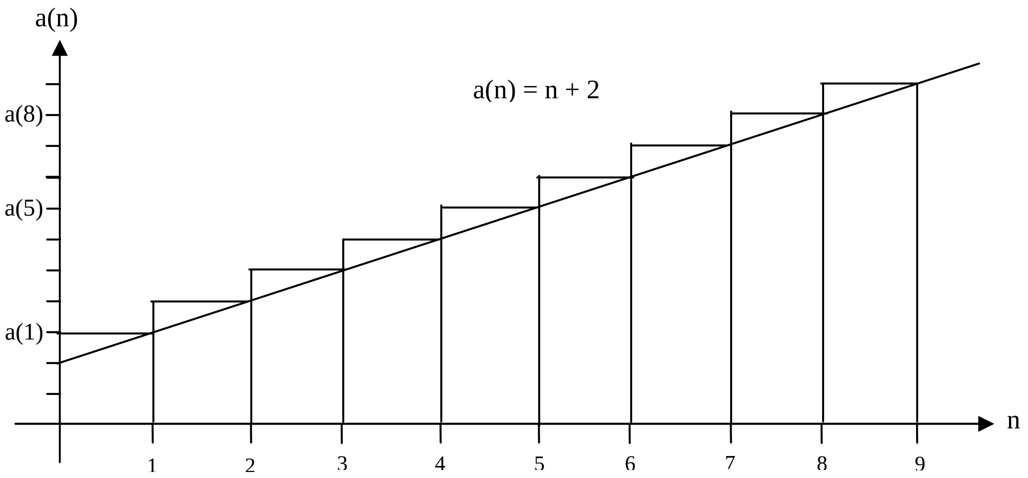
זוהי למעשה הצגה גרפית של הסדרה $a_n = n+2$ או $a(n) = n+2$ **(גרף מס׳ 3)**.

רצוי לציין שהסימון המקובל לאיברי סדרה בעזרת אינדקסים a_n משמעותו זהה לגמרי ל- $a(n)$ הנובע מהסימון $f(x)$ המקובל לערכים שהפונקציה מקבלת עבור x. כלומר: $a(n) = a_n$.



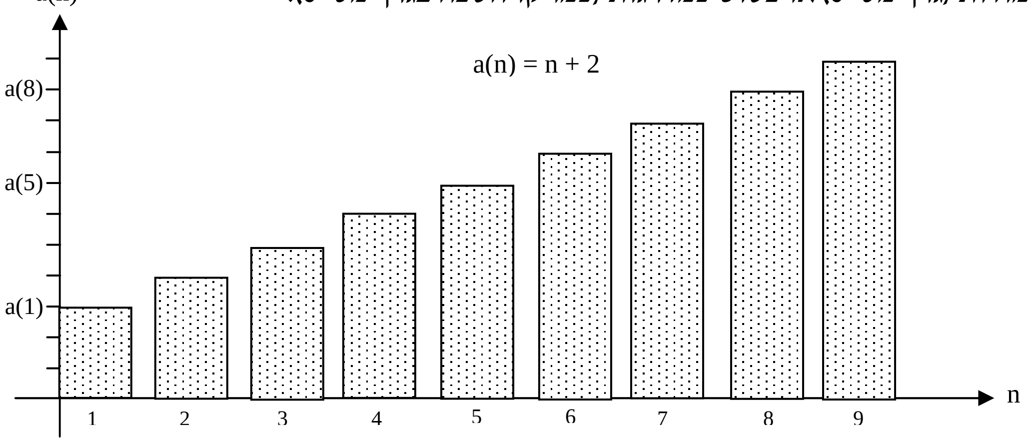
גרף מס׳ 3

ציר ה- x הוא כעת ציר ה- n מפני שמדובר במספרים טבעיים בלבד. על ציר ה- y מתקבלים הערכים של כל איברי הסדרה החשבונית. כדי להבליט זאת נחבר את הערכים המבודדים המתקבלים עבור n בקווים אופקיים מהערך $a(n)$ שמאלה. נקבל פונקצית מדרגות **(גרף מס׳ 4)**.

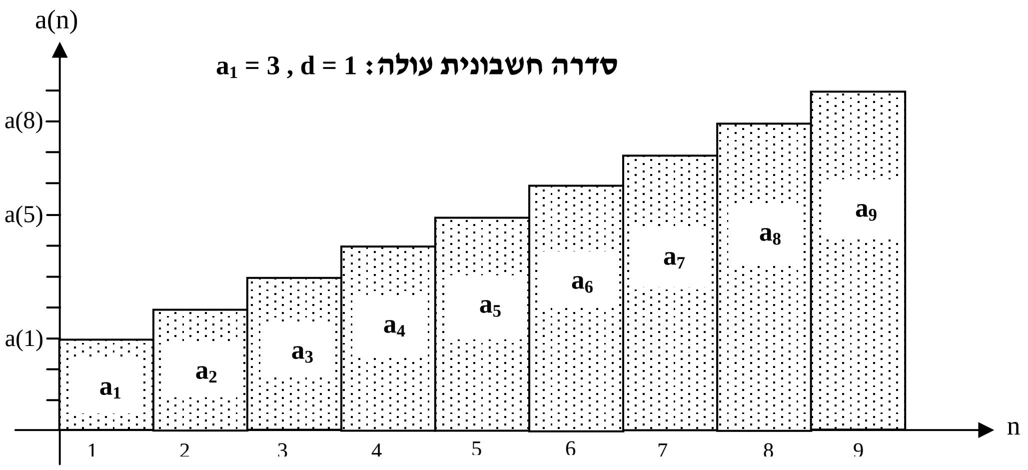


גרף מס' 4

איברה הראשון של הסדרה (הקומה הראשונה) שווה ל- 3 וגובה כל מדרגה הוא 1. גובה המדרגה מבטא כמובן את ההפרש המיוחד של הסדרה החשבונית הנידונה. (שיפוע הפונקציה הלינארית זהה להפרש הסדרה). את האיברים עצמם אפשר להציג בצורות גרפיות רבות. למשל: כנקודות (גרף מס' 3), כמלבנים מדורגים (גרף מס' 4), כעמודות מופרדות אחת מן השניה (גרף מס' 5), כעמודות צמודות (גרף מס' 6) או פשוט כמדרגות (כמו קו השפה בגרף מס' 6).



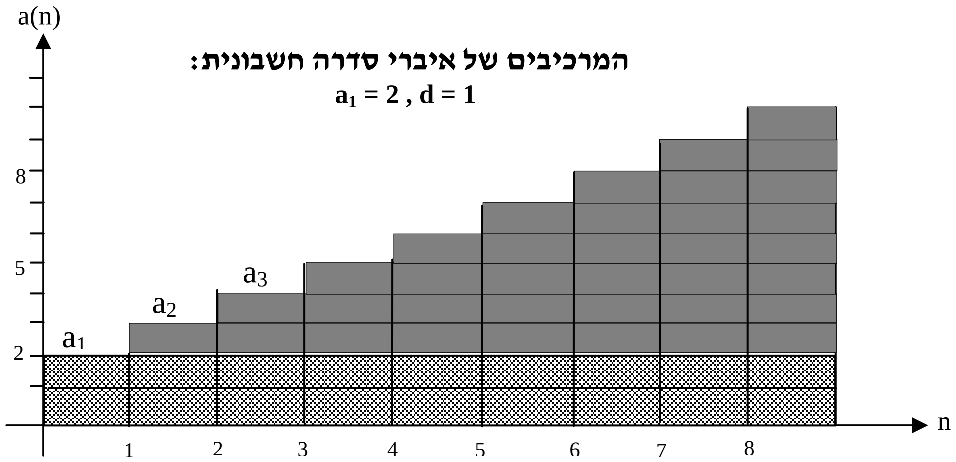
גרף מס' 5



גרף מס' 6

1.1 האיבר הכללי

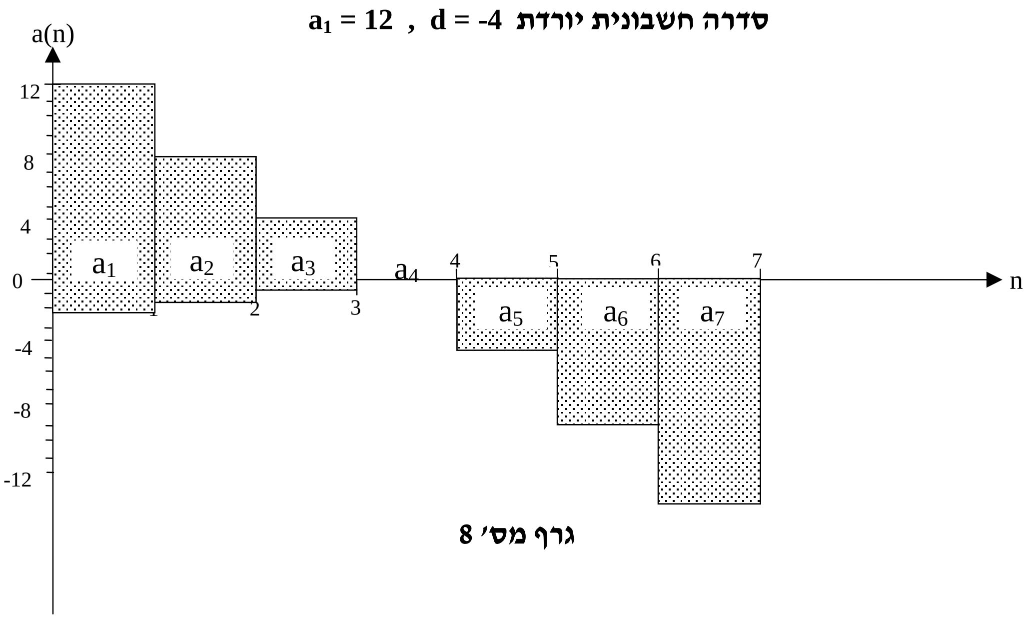
עתה ניתן להגדיר כל קומה כאיבר של הסדרה שגודלו כערך ה- y של הקומה ומספרו הסידורי ניתן בציר ה- n. ההצגה הגרפית מאפשרת בנקל לבנות את נוסחת האיבר ה- n -י: לכל קומה רצויה $a(n)$, אפשר להגיע מהקומה הראשונה $a(1)$ על ידי טיפוס במדרגות שגובה כל אחת מהן הוא d ושמספרן של המדרגות קטן ב- 1 ממספר הקומה הרצויה $(n-1)$. סך כל העליה היא של $(n-1)d$.
למשל, בגרף מס' 7 רואים שגובה הקומה השלישית שווה לגובה הקומה הראשונה (2) ועוד גובהן של שתי מדרגות $(2+2\cdot1=4)$.
גובה הקומה השביעית הוא כגובה הקומה הראשונה ועוד גובהן של שש מדרגות וכו'. היות וגובה הקומה הראשונה הוא a_1 וגובה כל מדרגה הוא d, הרי ש- $a_4 = a_1 + 3d$, $a_7 = a_1 + 6d$ וכו'.



גרף מס' 7

1.2 סדרה מונוטונית וסדרה קבועה

פונקציה לינארית יכולה להיות מונוטונית עולה (שיפוע חיובי לכל x) ומונוטונית יורדת (שיפוע שלילי לכל x). כך גם סדרה יכולה להיות מונוטונית עולה בה ההפרש d חיובי (גרף מס' 7) או מונוטונית יורדת בה ההפרש d שלילי (גרף מס' 8). כדאי לשים לב לכך שהאיבר הרביעי בסדרה המוצגת בגרף מס' 8 שווה ל- 0. האיברים, החל מהחמישי, שליליים. אפשר גם לתאר באופן כזה סדרה קבועה, בה ההפרש (d) שווה ל- 0. למשל, בגרף מס' 9 כל איברי הסדרה a_n זהים זה לזה ושווים לשתי יחידות (גרף מס' 9).



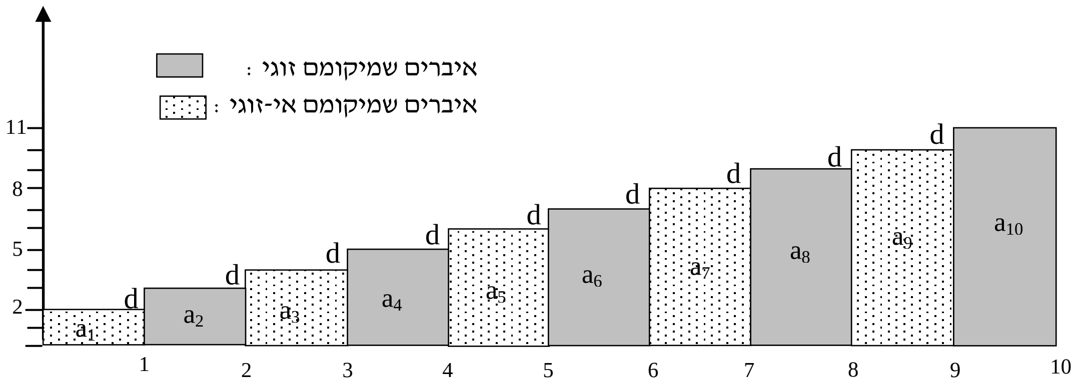
גרף מס' 8

גרף מס' 9

1.3 בעיות מורכבות

תלמידים רבים מתקשים בפתרון שאלות הנוגעות בתת-קבוצות של האיברים בסדרה (חשבונית) העומדים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים. גרף מס׳ 10 בא לסייע בפתרון בעיה מסוג זה, על-ידי הדגשת האיברים העומדים במקומות הזוגיים והאי-זוגיים בעזרת צביעתם בצבעים שונים. כאן באה לידי ביטוי ציורי העובדה שבתת-הקבוצות ההפרש הינו כפליים מאשר בסדרה המקורית ומספר האיברים הינו מחצית מספר האיברים בסדרה המקורית.

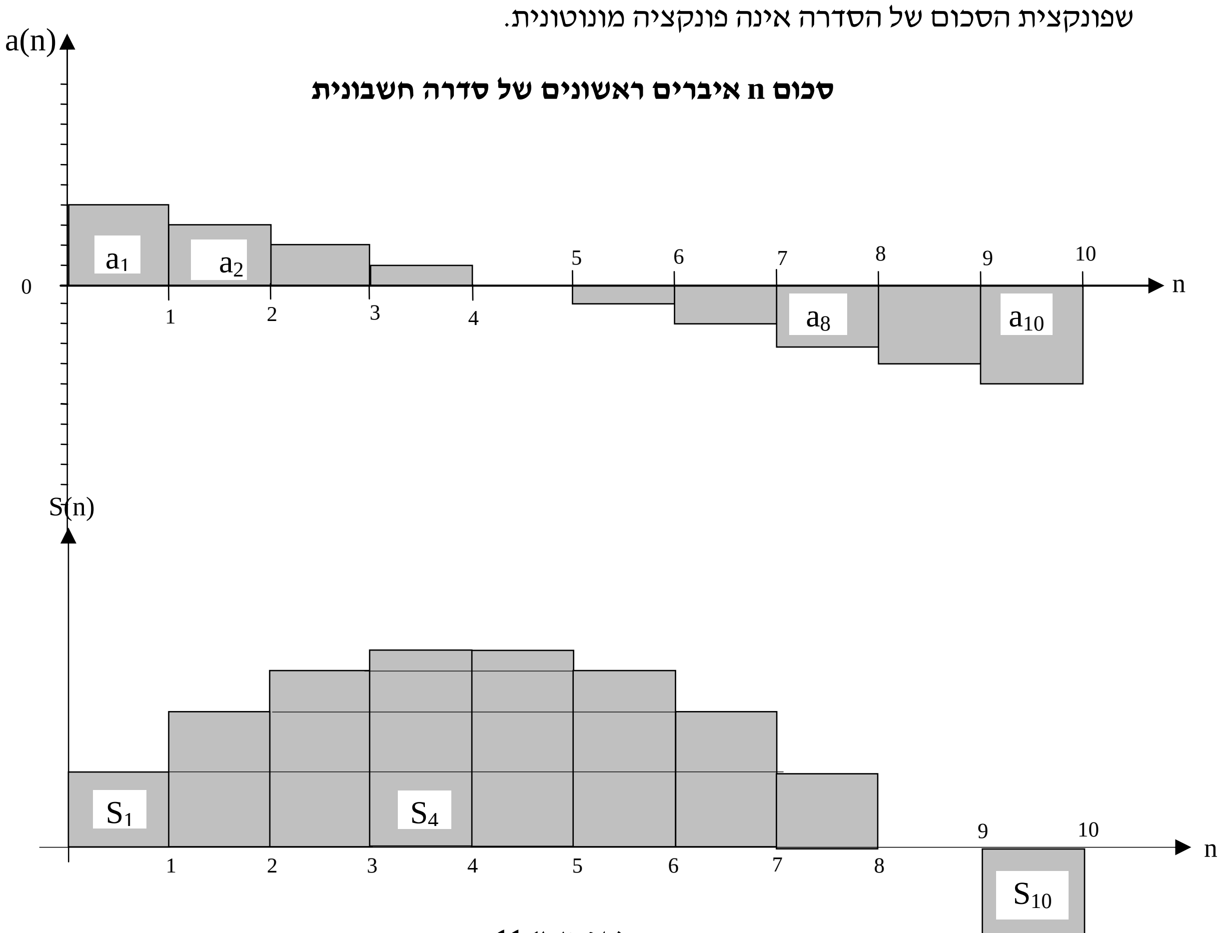
סדרה חשבונית: $a_1 = 2 , d = 1$



גרף מס׳ 10

1.4 סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית

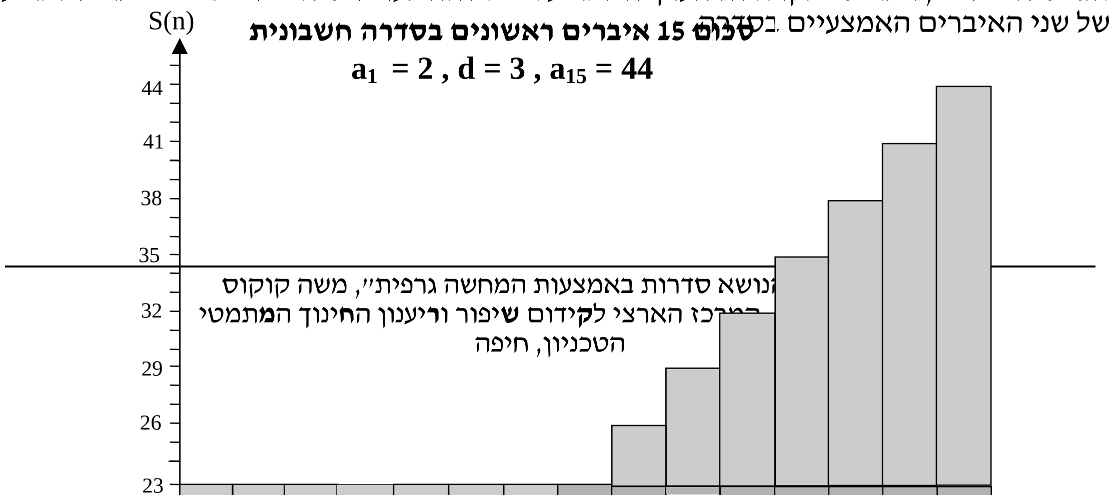
על מנת להבהיר לתלמידים את המשמעות של סכום n האיברים הראשונים של סדרה חשבונית, s_n, שהוא בעצם פונקציה של n, אפשר להיעזר בגרף מס' 11. בשרטוט זה אפשר לראות ש: $s_1 = a_1$, $s_2 = a_1 + a_2$, $s_3 = a_1 + a_2 + a_3$ וכו'. המחשה זאת יכולה לעזור להבחין בין a_n ו- s_n. כאן התלמיד רואה אותם כל אחד לחוד לנגד עיניו, ומקבל כלי להבחנה ביניהם. הגרף יכול גם להקל על המורה להסביר איך זה שבסדרה, שבה יש איברים השונים בסימניהם, קורה שהסכום של שני איברים, למשל, שווה לסכום של שבעה איברים. בנקל ניתן להבין מהתמונה שתוספת איברים (שליליים) מקטינה את הסכום. פה המקום להדגיש שבניגוד לפונקצית האיבר הכללי של הסדרה, הרי שפונקצית הסכום של הסדרה אינה פונקציה מונוטונית.



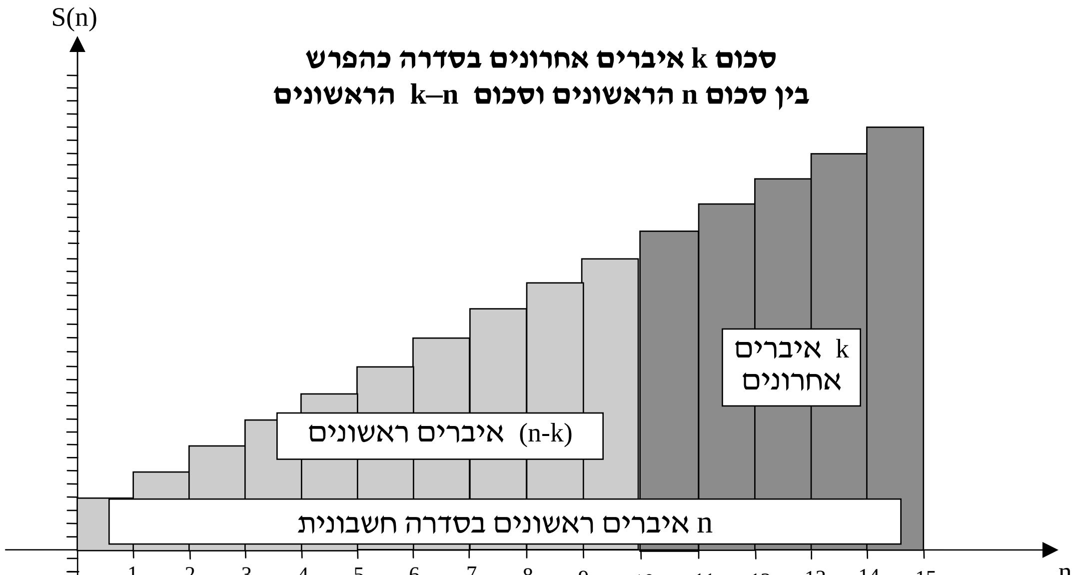
גרף מס' 11

בעזרת גרף מס' 12 אנו יכולים להסביר את משמעות הנוסחה לסכום n האיברים הראשונים בסדרה לפי העיקרון שלכל קבוצה, בת מספר אי-זוגי של איברים בסדרה חשבונית, יש איבר אמצעי שערכו הוא הממוצע.

במקרה שלנו זה האיבר השמיני, שערכו 23, והוא ממוצע הסדרה כולה. אם נקח את קטעי האיברים שמעל הממוצע, (המשולש המודגש בצבע שונה), ונעבירם שמאלה מתחתיו, נשלים מלבן ששטחו יהיה כשטח כל המלבנים (איברים) שבסדרה. הדבר נכון כמובן גם לגבי קבוצה בת מספר זוגי של איברים, אלא שבמקרה זה הערך הממוצע איננו זהה לערכו של איבר בסדרה אלא לממוצע של שני האיברים האמצעיים בסדרה.



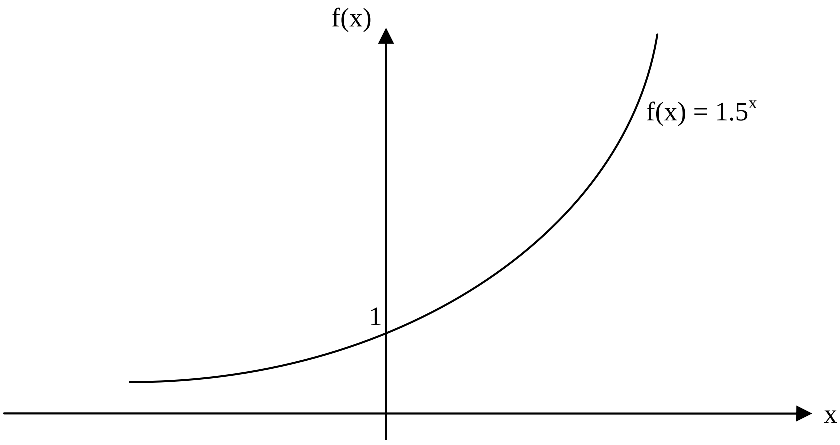
על פי עקרון המלבנים ועל ידי כך שנסתייע בגרף מספר 13, קל יהיה להסביר נקודה קשה נוספת והיא שסכום של k האיברים האחרונים בסדרה בת n איברים הוא $S_n - S_{n-k}$ ולא S_k או $S_n – S_k$ כפי שתלמידים רושמים בטעות.



גרף מס' 13

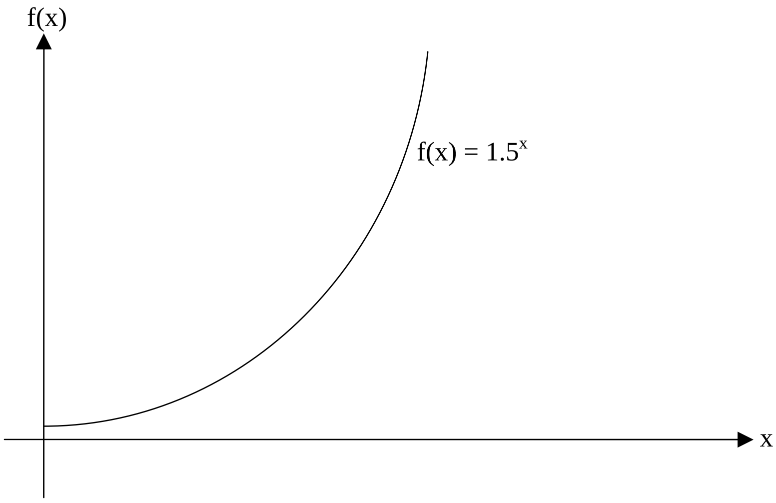
2. סדרה הנדסית

הצגה דומה ניתן לבצע עבור סדרה הנדסית. תיאור גרפי של סדרה הנדסית אפשר לבנות אם יוצאים מפונקציה מעריכית ומגבילים את תחום הגדרתה למספרים הטבעיים. למען נוחות התצוגה כדאי בשלבים הראשונים להתייחס לסדרה הנדסית אשר איברה הראשון a_1 שווה לערך מנתה q, כאשר $q > 0$. מתחילים עם פונקציה מעריכית המוגדרת לכל x (גרף מס׳ 14).



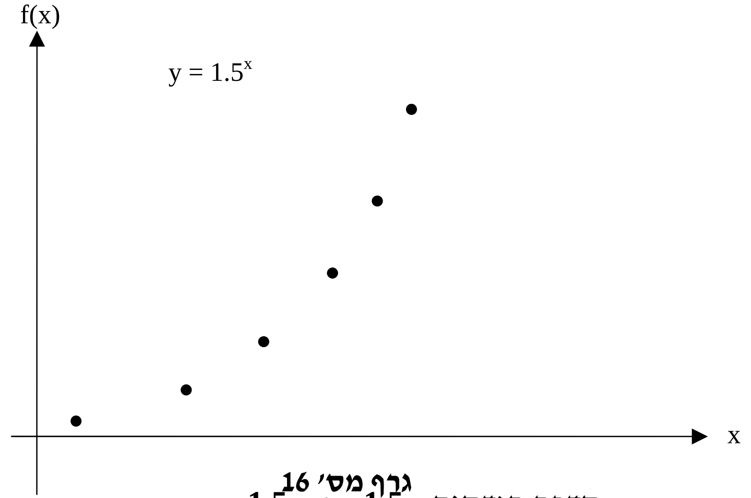
גרף מס׳ 14

עוברים לפונקציה מעריכית המוגדרת למספרים האי-שליליים (גרף מס׳ 15), ומגבילים אותה לערכים הנקודתיים המתקבלים על המספרים הטבעיים (גרף מס׳ 16). את אלה מחברים (שמאלה) בקווים אופקיים לפונקצית מדרגות (גרף מס׳ 17).
ציר ה- x הוא ציר ה- n וציר ה- y הוא ציר ה- a(n).



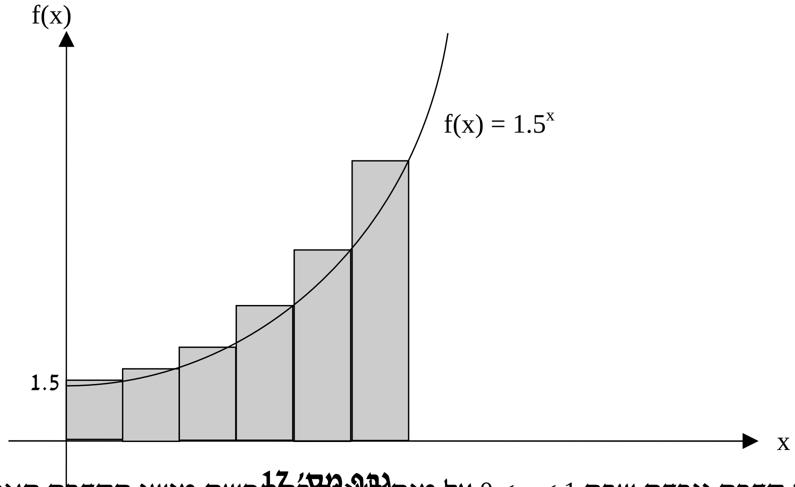
גרף מס׳ 15

פונקציה מעריכית בתחום הטבעיים



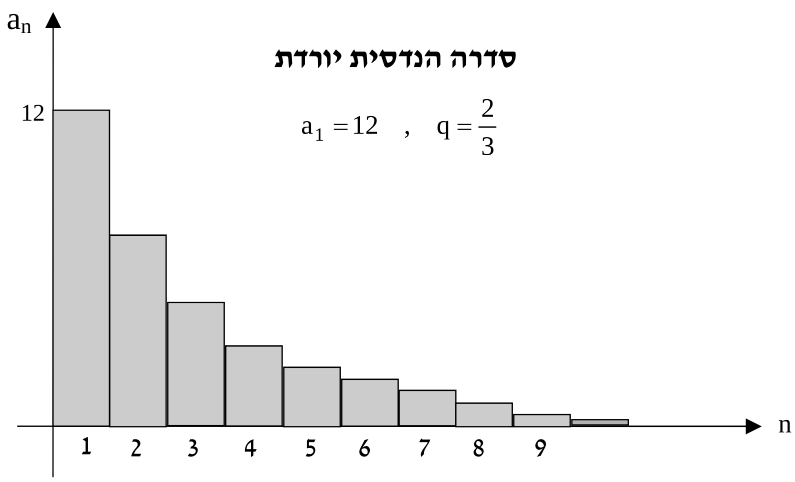
גרף מס' 16

סדרה הנדסית $a_1 = 1.5$, $q = 1.5$



גרף מס' 17

מעניין להציג סדרה יורדת שבה $0 < q < 1$ על מנת לעזור בהמחשת מושג הסדרה האינסופית (גרף מס' 18).



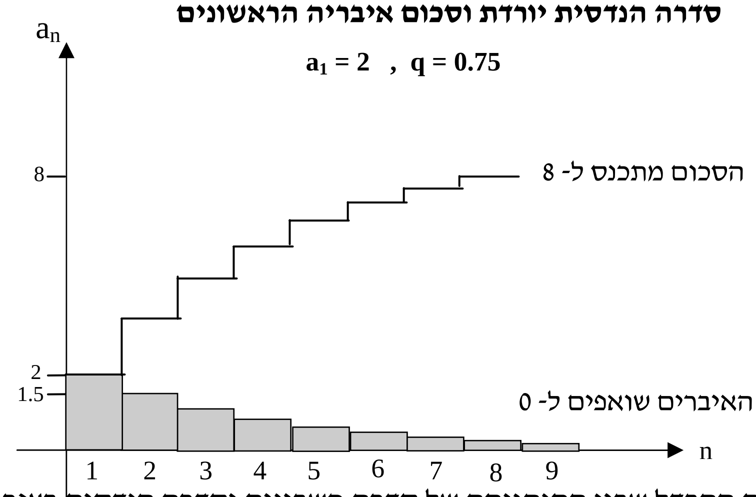
גרף מספר 18

קל להסביר בעזרתו את העובדה שכאשר איברי הסדרה שואפים ל- 0, עבור n השואף לאינסוף, הרי שסכום איברי הסדרה מתכנס לערך מסוים.

גרף מס' 19 מתאר סדרה הנדסית שאיברה הראשון 2 מנתה $\frac{3}{4}$ וסכומה מתכנס ל- 8.

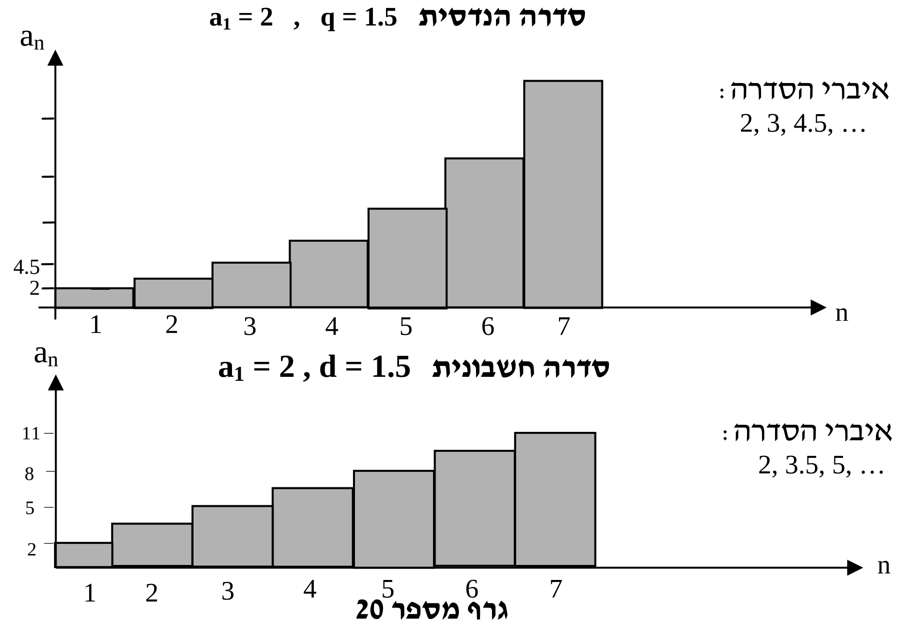
כדאי להדגיש שגם סדרה הנדסית הינה מונוטונית עולה או יורדת (או קבועה). שימוש נוסף לגרף זה יהיה בשלב מתקדם יותר בלימודים כאשר נושא השיעור יהיה מושג הגבול.

סדרה הנדסית יורדת וסכום איבריה הראשונים



גרף מספר 19

קל להראות את ההבדל שבין התנהגותה של סדרה חשבונית וסדרה הנדסית בעזרת גרף מס' 20. ההבדל בא לידי ביטוי בהפרש הקבוע שבין כל איבר לקודמו (פרט לראשון) שנראה בסדרה החשבונית, לעומת ההפרש הלא קבוע שבין כל איבר לקודמו, בסדרה הנדסית. (בסדרה הנדסית, כזכור, היחס שבין כל איבר לקודמו הוא קבוע).

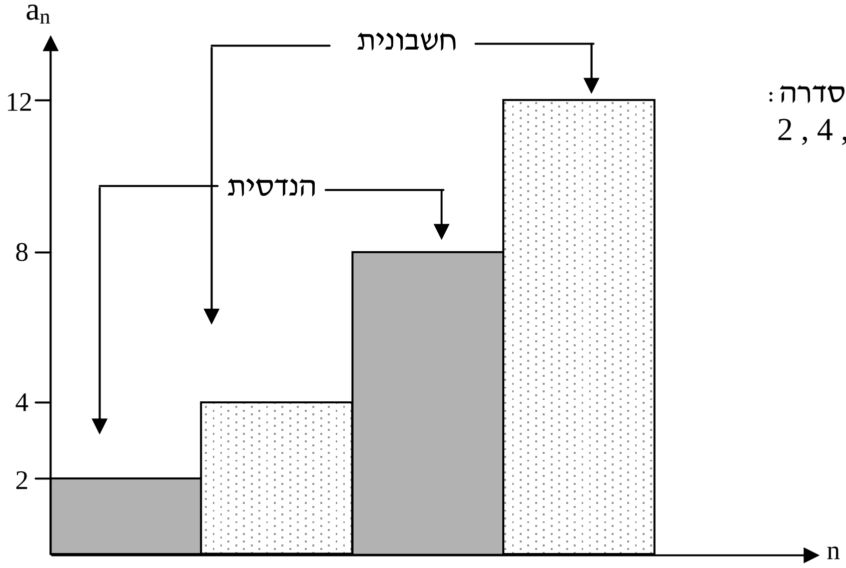


גרף מספר 20

3. סדרות מעורבות

היתרון של שימוש בפונקצית מדרגות להוראת הסדרות בולט במיוחד כשמגיעים לנושא המורכב של סדרות מעורבות. למשל, הסדרה 2, 4, 8, 12 (גרף מס' 21) ששלושת איבריה הראשונים מהווים סדרה הנדסית ושלושת איבריה האחרונים מהווים סדרה חשבונית.

סדרה מעורבת

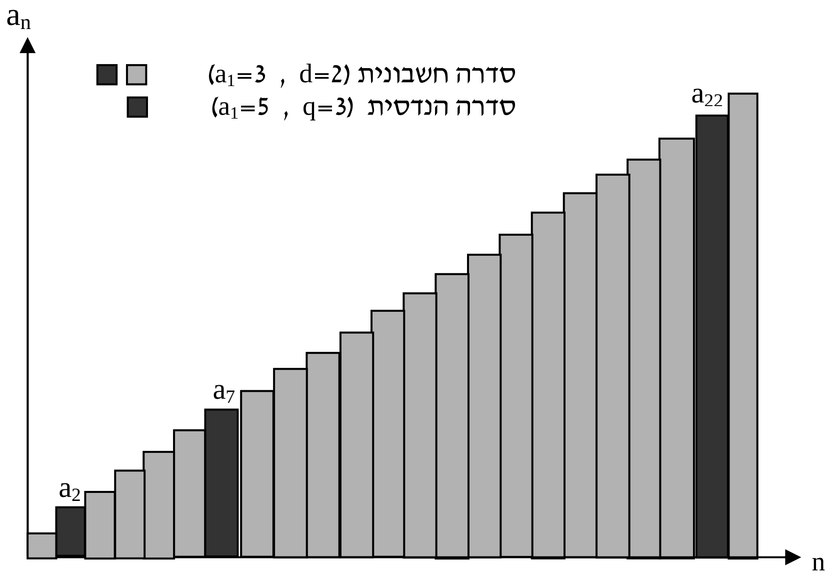


איברי הסדרה :
2 , 4 , 8, 12

גרף מספר 21

דוגמה לא פחות טובה מוצגת בגרף מס' 22 המתאר סדרה חשבונית אשר שלושה מאיבריה (a_2, a_7, a_{22}) מהווים סדרה הנדסית (האיברים המודגשים בצבע אחר).

סדרה מעורבת



גרף מספר 22

לסיכום אנו רואים שניתן להמחיש באופן גרפי, בשיטה זו, כמעט את כל המושגים של הסדרות החשבונית וההנדסית. כך ניתן להקל על התלמידים להבין את המושגים הקשורים לסדרות ולהעמיק את ההבנה.