הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל  המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

**"קשר-חם"** : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

# הנושא: **חיבורים מתמטיים של שני חכמי ספרד: אברהם בר חייא ואברהם אבן עזרא**

הוכן ע"י: קלרה זיסקין, אוניברסיטת חיפה.

תקציר: בחומר מובאים חלקים מתוך החיבורים המתמטיים של שני רבנים דגולים: אברהם בר חייא ואברהם אבן עזרא, שחיו בספרד במאה ה- 12. החיבורים נכתבו בעברית והם היוו ספרי לימוד במשך דורות. בחומר מובאת השוואה של הפתרונות שהציעו שני הרבנים עם פתרונות עכשויים.

מילות מפתח: אלגברה, נוסחאות הכפל המקוצר, פתרון משוואה ריבועית, פתרון מערכת משוואות, בעיות מילוליות, גיאומטריה, הנדסה, גיאומטרית המישור, הנדסת המישור, מושגים, מושגי יסוד, משולש, מרובע, טרפז, ריבוע, מעגל, עיגול, משפט פיתגורס, מדידות, היקף, שטח, פעולות חשבון, חיסור, כפל, לוח הכפל, פונקציה ממעלה ראשונה, פונקציה קווית, פונקציה ממעלה שנייה, פרבולה, פלינדרום, מספרים פלינדרומיים, תאריכים פלינדרומיים, היסטוריה של המתמטיקה, אברהם בר חייא, אברהם אבן עזרא.

החומר הוגש במסגרת: בי"ס קיץ בנושא "שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה", שנה"ל תשס"ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 16 עמודים.

# חיבורים מתמטיים של שני חכמי ספרד: אברהם בר חייא ואברהם אבן עזרא

## ר' אברהם בר חייא הנשיא

ר' אברהם בר חייא הנשיא היה מתמטיקאי ואסטרונום ספרדי-עברי, הנציג הראשון של התרבות היהודית-ערבית שחיבר ספרי מדע בעברית.

על-פי הדיווחים המקובלים הוא חי בשנים 1065 עד 1136, אך ניתן למצוא דיווחים כי עדיין חי בשנת 1145. לא הגיעו לידינו ידיעות של ממש על קורותיו, אלא רק דברים מקוטעים והשערות של חוקרים. מקום לידתו לא ידוע לנו, אך ידוע שרוב ימיו פעל בברצלונה בירת חבל ארץ קטלוניה שבספרד. לפי דיווח המצוי באחד מכתביו: "אילו הייתי מוצא בארץ צרפת חיבור זה בלשון הקודש...", ניתן להסיק כי פעל גם בצרפת.

באותם הזמנים שלטו בברצלונה הנוצרים, אשר נלחמו ממושכות בערבים ששלטו לפניהם בספרד. למרות המלחמות ניכרה השפעת התרבות הערבית עליהם.

קטלוניה היוותה מרכז חשוב למדעי הטבע ולמדעים המדויקים. בין המלומדים בלטו יהודים שעסקו במתמטיקה, פיסיקה, אסטרונומיה, אלכימיה, גיאוגרפיה, פילוסופיה ורפואה. אחד מהם היה רבי אברהם בר חייא, שזכה בשני תארי הכבוד – 'הנשיא' ו'סאבאסורדה'. התואר 'הנשיא' היה די שכיח בקרב יהודי ספרד באותה התקופה. בעולם הנוצרי בר חייא היה מוכר בשם Savasorda – שיבוש של שתי מילים ערביות 'צאחב אל-שורטה' שפירושן 'ראש השלישים'*. תואר זה מעיד על תפקיד ציבורי-משפטי רם שבר חייא מילא בחצר המלכות של ברצלונה.

אברהם בר חייא התפרסם הודות לספרו החשוב הכתוב בעברית *'חיבור המשיחה והתשבורת'* שראה אור בשנת 1116. מקורן של המילים 'משיחה' ו'תשבורת' הוא בארמית וגם בערבית. 'משיחה' פירושה חבל מדידה וגם מידה, 'תשבורת' פירושה חישוב ריבוע או שטח. הספר תורגם ללטינית בשנת 1145 על-ידי פלאטו מטיבולי ושימש במשך מאות שנים ספר לימוד למודדי קרקעות.

ספר זה היה הספר הראשון של האלגברה הערבית, האלגברה של אל כאריזמי, אבו כאמיל, אל קאראי והכיל פתרון מלא של המשוואה הריבועית הכללית.

בספר זה מגדיר אברהם בר חייא מונחים שונים, מוכיח משפטים גיאומטריים ומתאר כלים למדידה. הספר מכיל הדרכה במדידות ולמעשה הוא הספר הראשון בעולם המערבי שמכיל ידיעות על הטריגונומטריה ועל תורת המדידות שהייתה ידועה לערבים.

מתמטיקאים רבים, ביניהם לאונרדו פיזנו (פיבונצ'י) הושפעו עמוקות מהספר.

אברהם בר חייא כתב עוד ספרים חשובים רבים:

- אנציקלופדיה בשם *'יסוד התבונה ומגדל האמונה'* שנושאיה הם: מתמטיקה, אסטרונומיה, אופטיקה, מוזיקה, תורת ההיגיון, מדעי-הטבע, מדעי-המדינה ודעת.
- *'ספר העיבור'*, נכתב ב-1123 על היתוספות יום לחודש וחודש לשנה – הסבר וניתוח של לוח השנה העברי – כתוב בצורה של ספר לימוד ובו שלושה פרקים המחולקים כל אחד לעשרה שיעורים. ספר זה צוטט לעתים קרובות על-ידי חוקרים במשך הדורות.
- הספר *'לוחות הנשיא'*, בו מתייחס בר חייא ללוחות אל-בטאני (על-שם אסטרונום עיראקי מוחמד אל-בטאני שחי בשנים: 850-925) ובו פונקציות טריגונומטריות.

* שליש - כנוי לאדם הנאמן על שני הצדדים. (מילון אבן שושן)

- ✧ באסטרונומיה: *'צורת הארץ ותבנית כדורי הרקיע' וסדר מהלך כוכביהם הרקיע'*. זהו התיאור הראשון של שיטת תלמי (פטולימאוס) בעברית, שהיה מקור עיקרי לידיעת אסטרונומיה וגיאוגרפיה בקרב היהודים בימי-הביניים.
- ✧ ככל חכמי דורו עסק גם ר' בר חייא בפילוסופיה. ספרו *'הגיון הנפש העצובה'* עוסק בבעיות מוסר, בבריאת העולם ובבעיית הטוב והרע.

## הספר *'חיבור המשיחה והתשבורת'*[*]

זהו חיבור מקורי מאוד, אף כי יש לזכור כי בזמן ההוא המחברים היו משבצים בספריהם חלקים או קטעים של ספרים אחרים, וכך הן המשפטים והן השאלות היו עוברים מספר לספר.

גם בר חייא, כמו האחרים, הושפע מהספרים היוונים הקלאסיים, כמובן דרך תרגומיהם הערביים. מקוריותו של הספר מתבטאת בכך שזהו הספר הראשון שעוסק בענייני מתמטיקה ותכונה (אסטרונומיה) ברוח המדע היווני-ערבי שנכתב בעברית. בר חייא הביע **בעברית** דברים שמעולם לא נאמרו בשפה זו, לכן היה עליו לחדש לא מילים בודדות, אלא מערכות שלמות של מילים ושל מונחים מדעיים, וליצור סגנון חדש, שבו אפשר יהיה להביע את המושגים החדשים. כך, למשל, יצר את המושגים: גדר (הגדרה), ערך,מידה, מספר, גודל, משקל, נקודה, אורך, רוחב, עומק, שיעור (ממד), סוף, ראשית, מחיצה (חלוקה), קו, ישר, שטח, זווית, זווית חדה, זווית שטוחה, זווית ניצבה (ישרה), זווית נרווחת (קהה), עמוד (אנך או גובה), משולש, צדדים (צלעות), תושבת (בסיס), מרובע שווה (ריבוע), מרובע ארוך (מלבן), מרובע מעוין, קטומת ראש (טרפז), מרבה צלעות (מצולע), עיגול, קו סובב (היקף), אלכסון (קוטר), מיתר ישר (סינוס), מיתר שארית (קוסינוס), צל נפרש (טנגנס), צל פשוט (קוטנגנס), ועוד.

נביא כאן כמה הגדרות כפי שנכתבו על-ידי בר חייא מתוך ספרו *'חיבור המשיחה והתשבורת'*:

**ערך** – "אני אומר מילת ערך על המידה או על המספר או המשקל ועל כל עניין שהוא בא מן הדרך הזה".

**נקודה** – "מילת הנקודה אני אומר אותה על דבר שאין לו ערך כלל, לא אורך לא רוחב ולא עומק ולא שום שיעור. ותהיה הנקודה בגדר הזה תכלית הקו או המחיצה אשר בין שני קוים נדבקים זה אל זה".

**קו** – "והקו הוא ערך, שיש לו שיעור באורך בלבד ואין לו רוחב ולא עומק, ותכליותיו על שני ראשיו הם נקודות".

**שטח** – "והשטח או הפרוש הוא ערך, שיש לו שיעור באורך וברוחב ואין לו עומק, ותכליותיו מכל רוחותיו הם קוים כולם".

**גוף** – "והגו או הגולם הוא ערך, אשר יש לו אורך ורוחב ועומק או קומה, ותכליותיו מכל צדדיו ורוחותיו הם שטחים ופרושים".

**אלכסון וקוטר** – "והקו הנקרא אלכסון הוא הקו היוצא בשטח המרובע ובגופו מן זווית אחת אל הזווית אשר היא עומדת כנגדה בצד השני. ואלכסון העגול הוא הקו החולק אותו לשנים ונקרא בלשון ערבי קוטר". (קוטר – זאת אחת המילים הערביות המעטות שבר חייא הכניס לחיבוריו.)

[*] ר' רשימת מקורות [2].

כאן בהגדרת האלכסון של המרובע יש מילים מיותרות: "בשטח המרובע ובגופו" "אשר היא עומדת כנגדה בצד שני" – ואילו בהגדרת אלכסון העיגול חסר הציון ההכרחי שהוא עובר דרך המרכז, אולי מתוך ההנחה שהקורא יבין את הביטוי "קו החולק אותו (את העיגול) לשניים" בהוראת "החולק אותו לשני חלקים שווים".
לגבי חלק ממונחי החשבון נהג בר חייא בחוסר קביעות, הוא השתמש במילים שונות עבור מושג מתמטי אחד, ללא כל מגמה להגיע לביטוי מבורר ומדויק.

לדוגמה, את הפועל 'חיבר' הביע על ידי: אסף, חיבר, הוסיף, כינס, צירף, קיבץ;

מונח ה'סכום' אצלו: סך, כלל, הנקבץ;

'חיסר' – גרע, הוציא, השליך, פחת; 'הפרש' – עודף, מותר, נותר;

'כִּפֵּל' – מָנָה; 'מכפלה' – מניין, הנקבץ (כמו סכום); 'גורמים' – מנויים;

'**חילק**' – חילק (כמו היום); 'מָנָה' – חֵלֶק, 'יחס' – קֶצֶב;

'להעלות לריבוע' – ריבוע, ריבוע בעצמו, תשבורת (ריבוע, פירושו שטח, ושטח הוא תשבורת); 'הוצאת שורש' – ידע את הגדר, הוציא את הגדר, לקח את הגדר.

הספר מתחלק לארבעה שערים. השער הראשון מכיל הגדרות של מושגי יסוד של הגיאומטריה ושל החשבון ומשפטים עיקריים (ראה למעלה דוגמאות).

**השער השני**, המרכזי והגדול ביותר, מכיל חמישה חלקים: החלק הראשון על מדידות הריבוע והמלבן, השני על מדידת המשולש, השלישי על מדידת שאר המרובעים, הרביעי על מדידת העיגול וחלקיו, החמישי על מדידת המצולעים בעלי יותר מארבע צלעות. השער השלישי עוסק בחלוקת השטחים, והרביעי בחישוב הנפחים.

פן נוסף בו מתגלית המקוריות הנוספת של הספר היא בהסברים שמביא בר חייא. יש להבין שבזמנים ההם ספרי הלימוד לא היו דומים לאלה המוכרים לנו: מלאים נוסחאות ושרטוטים. בר חייא הצליח בצורה ברורה ומדויקת לתאר נוסחאות ולהציג שרטוטים בעזרת הסברים מילוליים. למרות שהדברים לא נכתבו בדרך המוכרת לנו, אנחנו בקלות יכולים 'לתרגם' את התיאורים המילוליים לכתיבה מתמטית המקובלת עלינו, בעזרת אותיות וסימני פעולות חשבון.
נביא כאן כמה דוגמאות של בעיות יחד עם התשובות וההסברים כפי שנתנו על-ידי בר חייא מתוך השער השני של הספר (הסימון של בעיות יעשה על-ידי הסימן § כפי שמופיע בספרו של בר חייא בהוצאה של 'חברת מקיצי נרדמים', ברלין, 1913).

וכך מציע בר חייא שאלה (47§) וגם משיב עליה:

"מרובע שווה אשר הוצאתָ ממניין תשבורתו מניין צלעותיו הארבעה ונשאר בידך מן התשבורת כ"א אמה, כמה הוא התשבורת וכמה הוא מניין כל צלע וצלע מהמרובע?"

(אם משטח ריבוע נחסר את סכום ארבע צלעותיו, ונקבל 21, מהו אורך צלע הריבוע ומהו שטחו?)

**וזו תשובתו:**

"חלק מניין הצלעות אשר הוא ארבעה לשנים, ומנה השנים בעצמו ויהיו **ד'**, והוסף המניין הזה אל המניין המסור לך אשר נשאר מן המרובע ויהיה הכל **כ"ה**. ודע גדר **כ"ה**, והוא **ה'**, נוסיף אליו מחצית הצלעות, הוא **ב'**, ויהיה הכל **ז'** והוא צלע המרובע, ותשבורתו **מ"ט**. והשואל הזה פחת מן התשבורת אשר היא **מ"ט**, מספר ארבע הצלעות, אשר כל אחת מהן **ז'**, וארבעתן **כ"ח**, ונשאר מן המרובע **כ"א**, כאשר אמר לך".

אם 'נתרגם' את ההערות לפתרון לשפה מתמטית, נקבל:

הפעולה הראשונה: $4:2 = 2$

הפעולה השנייה: $2\cdot 2 = 4$

הפעולה השלישית: $4 + 21 = 25$

הפעולה הרביעית: $\sqrt{25} = 5$

הפעולה החמישית: $5+\frac{1}{2}\cdot 4 = 5+2 = 7$

הפעולה השישית: $7^2 = 49$

הפעולה השביעית: $49 - 4\cdot 7 = 49 - 28 = 21$

כפי שאנו רואים בר חייא השתמש בערכים המספריים של האותיות העבריות לסימון מספרים, אם כי אל-כריזמי (780-850), כ-300 שנים לפניו, כבר יצר שיטה עשרונית. ר' אברהם בר חייא דבק עדיין בשימוש המספרי של האותיות העבריות, כמו היוונים שהשתמשו באותיות יווניות לציון מספרים. בן תקופתו, אברהם אבן עזרא (בהמשך) השתמש כבר אז בשיטה העשרונית. הוא נעזר בתשע אותיות הראשונות של הא"ב העברי ואת האפס, שקרא בשם "גלגל", סימן בעיגול קטן. נחזור לשאלה של בר חייא. כיצד היינו מציגים בימינו את השאלה וכיצד היינו משיבים עליה?

השאלה: *מהו אורך צלעו של ריבוע אשר אם נפחית משטחו את סכום צלעותיו נקבל 21?*

וכך נשיב: נסמן אורך צלע הריבוע ב-$x$. שטח הריבוע הוא $x^2$ וסכום אורכי ארבע הצלעות $4x$.

לפי הנתון: $x^2 - 4x = 21$. נפתור את המשוואה הריבועית: $x^2 - 4x - 21 = 0$ לפי נוסחת השורשים: $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ נקבל: $x_{1,2} = \frac{4\pm\sqrt{4^2+4\cdot 21}}{2} = \frac{4\pm 10}{2}$

מכאן, $x_1=7$ ו- $x_2 = -3$. לצלע הריבוע לא יכול להיות ערך שלילי, לכן התשובה היא: $x = 7$.

בר חייא קיבל רק את הערך החיובי, כי בתקופתו לא הייתה משמעות למספרים שליליים. בספרים של בר חייא לא נמצאות נוסחאות אלגבריות כפי שאנו רגילים לראות אותן בספרי אלגברה, אבל מתוך הכתוב בספרו אפשר להבין שהוא ידע והשתמש בנוסחאות רבות.

לדוגמה, כמה מהן (27§ – 32§):

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $ab + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
3. $\left(a+b\right)b + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}+b\right)^2$
4. $\left(a+b\right)^2 + a^2 = 2a(a+b) + b^2$
5. $a^2 + b^2 = 2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 2\left(a - \frac{a+b}{2}\right)^2$
6. $\left(a+b\right)^2 + b^2 = 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{a}{2}+b\right)^2$

בר חייא נותן גם נוסחאות לפתרון משוואות ריבועיות כלליות (§47-§50):

$$1. \quad x^2 - ax - b = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$2. \quad x^2 + ax - b = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$$

$$3. \quad x^2 - ax + b = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

$$4. \quad x^2 + \left(a + x\right)^2 = b^2 \;\Rightarrow\; x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2 - a^2}{2}}$$

כמו כן נמצאות אצלו גם נוסחאות לפתרונות של מערכות משוואות בשני נעלמים:

$$1. \quad xy = a;\; x + y = b \;\Rightarrow\; x = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - a}$$

$$2. \quad x + y = a;\; x^2 - y^2 = b^2 \;\Rightarrow x = \frac{a^2 + b^2}{2a}$$

$$3. \quad xy = a;\; x^2 + y^2 = b^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{\frac{b^2 + 2a}{4}} + \sqrt{\frac{b^2 - 2a}{4}}$$

$$4. \quad \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = a^2;\; 2\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\left(\frac{y}{2}\right) = b \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x = \sqrt{a^2 + b} + \sqrt{a^2 - b};\quad y = \sqrt{a^2 + b} - \sqrt{a^2 - b}$$

את הנוסחאות בר חייא מסביר במילים, כאשר מאחורי כל נוסחה מסתתרת בעיה מסויימת.

בעיה 1 (§ 52 - המתאימה לנוסחה 1 שלעיל).

"ואם יאמר מרובע בתשברתו **מ"ח** וקו אורכו עם קו רוחבו שניהם יחד **י"ד**, כמה הוא אורכו וכמה הוא רחבו ?" (תשובה: **ח'** ו- **ו'**)

בעיה 2 (§ 53 - המתאימה לנוסחה 2 שלעיל)

"מרובע ארוך אשר באלכסונו עם צלעו האחת **י"ח** וצלעו השנית **ו'**, כמה רבועו ואלכסונו וכמה צלעו המנויה עם האלכסון ?" (תשובה: **י'** ו- **ח'**)

בעיה 3 (§54 - המתאימה לנוסחה 3 שלעיל)

"ואם יאמר מרובע שאלכסונו **י"ג** ורבוע **ס'**, כמה אורך כל צלע וצלע מצלעותיו ?"

(תשובה: **י"ב** ו- **ה'**)

בעיה 4 (§57 - המתאימה לנוסחה 4 שלעיל)

"ואם יאמר מעויין שצלעו **י'** ותשבורתו **צ"ו**, כמה הם אלכסונותיו ?" (תשובה: **י"ב** ו- **י"ז**).

נביא כעת דוגמאות לבעיות חישוב במשולשים וחישובי שטח של צורות גיאומטריות שונות בצירוף הנחיות או נוסחאות לפתרונן כפי שנתן ר' בר חייא.
מדהים, עד כמה ההנחיות קצרות ומדויקות.

**בעיה 1** (§60): "ואם תהיה יודע את העמוד במשולש השווה בצלעותיו ואין אתה יודע את הצֶלע, רַבֵּע את העמוד והוסף על המרובע שלישית וקח גדר הכל ותמצא הצלע."

**בעיה 2** (§62): "ואם תהיה יודע את העמוד ואת התושבת ותרצה לדעת את השוקיים, כגון האומר משולש שווה השוקיים, עמודו **י"ב** ותושבתו **י"ח**, כמה אורך כל אחת משוקיו ?" ואתה בא ורַבַּע את העמוד ויהיה **קמ"ד** והוסף עליו מרובע חצי התושבת והוא **פ"א** ויהיה הכל **רכ"ה** וגדר המספר הזה **ט"ו** והוא אורך כל אחת מן השוקיים."

נוסחה לפתרון: $a=\sqrt{\frac{b^2}{4}+h^2}$ , כאשר: $a$ – שוק, $b$ – בסיס, $h$ – גובה.

**בעיה 3** (§66): "וגם יאמר לך: משולש מתחלף הצלעות יש בתשבורתו עם העמוד **צ"ו** ותושבת העמוד **י"ד**, כמה הוא אורך העמוד ?"

נוסחה לפתרון: $h=\dfrac{S+h}{\frac{a}{2}+1}$ , כאשר: $a$ – בסיס, $h$ – גובה לבסיס, $S$ – שטח.

כאן נותן בר חייא גם נוסחאות לחישובים בטרפז שהוא קורא אותו: קטומת ראש או קטומה.

(§77 ו- §78) $h=\sqrt{c^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$ , ו- $S=\frac{a+b}{2}\sqrt{c^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}$

כאשר: $c$ – שוק בטרפז שווה שוקיים, $a$ ו- $b$ – בסיסים.

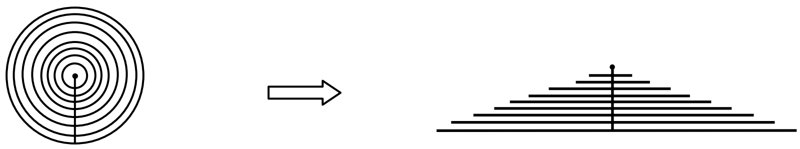
החלק הרביעי בשער השני הוא המרתק ביותר. כאן מטפל בר חייא בחישובי שטח של עיגול וחלקיו וגם בלוח הקשתות והמיתרים (פונקציות טריגונומטריות). כאשר לחישוב שטח של עיגול, יש לבר חייא שיטה מיוחדת. הוא מחלק את העיגול לרצועות דקות, מיישר אותן, מניח אותן זו על גבי זו ומקבל משולש, כאשר בסיס המשולש הוא אורך ההיקף של המעגל וגובהו – חצי הקוטר. וכך הוא כותב:

> (§95) "ואתה יודע תשבורת העגול התמים אם אתה יודע את אלכסונו והוא הנקרא קוטר בלשון ערבי, ותכפול הקוטר שלושה פעמים ושביעית פעם ויהיה אורך הקו הסובב, ואחר כך הוי מרבע את מחצית הקוטר במחצית הקו הסובב ותמצא תשבורת העגול....
> ואחר שידענו הקו הסובב והקוטר, אנו יודעים תשבורת כל העגולה שהיא מחצית הקוטר במחצית הקו הסובב. והאות על התשבורת הזה ידענו, אם תפתח שטח העגול מצד אחד ותישר כל הקווים הסובבים מקו החיצוני עד המרכז, יתפשטו המקיפים שטח העגול ויחזרו לקווים ישרים מתמעטים והולכים עד שחוזרים אל נקודה אחת והיא נקודת המרכז...

ובזה נולדה לנו צורת המשולש; ותשבורת המשולש כבר ביארנו, הוא כדי העמוד בחצי התושבת וזהו מחצית הקוטר במחצית הקו המקיף."

כלומר: $S = 3\frac{1}{7}\cdot\frac{d^2}{4} \;\Rightarrow\; S = \left(\frac{1}{2}d\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\frac{1}{7}d\right)$, כאשר: $d$ – קוטר

וכך זה נראה:



בסעיף הבא (96§), מביא בר חייא נוסחה אחרת לחישוב שטח העיגול:

"ואתה מגיע לתשבורת העגול מדרך אחרת שלא תצטרך בה אל הקו הסובב, והוא שתהיה מרבע את הקוטר ותגרע ממרובעו שביעיתו ומחצית השביעית ונשאר בידך הוא תשבורת העגול."

כלומר, אם נשתמש בעובדה, שקוטר שווה ל- $2r$, נקבל:

$$S = 4r^2 - \left(\frac{4r^2}{7} + \frac{4r^2}{14}\right) = \frac{44r^2}{14} = 3\frac{1}{7}r^2$$

(כאן הערך המיוחס ל- $\pi$ הוא $3\frac{1}{7}$).

בהמשך (97§), בר חייא נותן נוסחה יותר מדויקת:

"...אבל לדעת המדקדקים בחשבון העגול והם החושבים את מהלכות הכוכבים, האומרים על הקו הסובב שהוא שלושה מקוטר ועוד ח' חלקים וחצי משׂשים חלק בקוטר..."

$$S = \left(3 + \frac{8\frac{1}{2}}{60}\right)\cdot\frac{d^2}{4} = \frac{377}{120}r^2$$

(כאן הערך המיוחס ל- $\pi$ הוא $3\frac{17}{120}$).

נסכם: אין ספק שבר חייא הוא האומן הראשון אשר הרחיב בשיטתיות את גבולות הלשון העברית, והנחיל לה מינוח מדעי, הבנוי רובו ככולו תיבות ושורשים עבריים אותם לקח מאוצר הלשון העברית המקורית, ומזג לתוכם את התוכן המיוחד של המונחים המדעיים הערביים; לעתים רחוקות יצר מלים חדשות משורשים עבריים ובמקרים ספורים שאל מלים ערביות. על ידי זה הוא הניח יסוד למינוח מתמטי עברי, בנה חלק מן הבניין הזה – וגם אם הבאים אחריו הכניסו בו שינויים רבים, מכל מקום יסוד המלאכה ותבניתה נשארו כפי שהניח אותם אברהם בר חייא! מפעל חייו ראוי להערכה עמוקה מצידנו.

### ר׳ אברהם אבן עזרא

כשלושים שנה אחרי בר חייא המשיך בכתיבת מתמטיקה בעברית ר׳ אברהם בן מאיר אבן עזרא. הוא נולד בטודלה (צפון ספרד) בשנת 1089. באותה תקופה הצליחו הנוצרים לכבוש מחדש כמעט את כל ספרד המוסלמית. אבן עזרא בילה את חייו נע ונד בארצות שונות ביניהן איטליה, צרפת ואנגליה, וכתב שם את ספריו. אין ודאות ביחס למקום פטירתו של ראב״ע. קיימות שלוש השערות: רומא, ארץ-ישראל ולונדון. לכן, גם שנת פטירתו, 1167, היא בגדר השערה בלבד.

אבן עזרא היה איש רחב אופקים בכל תחומי המחשבה והמדע: אסטרונומיה, אסטרולוגיה, פילוסופיה, מתמטיקה, היה פרשן המקרא ומשורר. בין הספרים שלו:

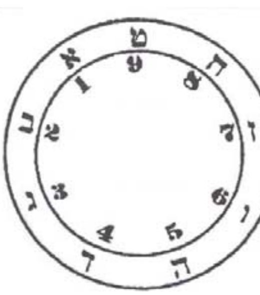
*׳ספר העיבור׳*, על לוח השנה העברי; באסטרונומיה: *׳משפטי הכוכבים׳, ׳ראשית חכמה׳, ׳כלי נחושת׳*; באסטרולוגיה: *׳ספר הטעמים׳, ׳ספר המבחרים׳*; במתמטיקה: *׳ספר המספר׳, ׳ספר האחד׳* ו- *׳יסוד מורא׳*.

ללא ספק הכיר אבן עזרא את כתביו של בר חייא, יחד עם זאת בולטת המקוריות בכתיבתו. כמתמטיקאי הוא השתעשע בצירופי מספרים. בדומה לפיתגוראים, חיפש סגולות מספריות של האותיות **א**, **ה**, **ו**, **י**, חישב צירופים של שבעת כוכבי הלכת, וחד חידות רבות.

### ׳ספר המספר׳*

׳ספר המספר׳ נכתב בשנת 1146, ככל הנראה באיטליה. זהו חיבור שיטתי ושלם באריתמטיקה (חשבון). במבוא נותן אבן עזרא את שיטת הספירה של חכמי הודו, היא השיטה העשרונית, בה ערכה של כל ספרה מחושב על פי מקומה במספר. אבן עזרא משתמש בתשע האותיות העבריות מ-**א**׳ עד **ט**׳, במקום הספרות ההודיות, וסימן ה׳אפס׳ אצלו הוא עיגול O, שמו- ׳גלגל׳, "ובלשון לעז שמו סיפרא" (עמ׳ 4 ב׳ספר המספר׳).

במבוא לספר מופיע ציור של שני מעגלים בעלי מרכז משותף, אשר בתוך המעגל הפנימי מסודרות ספרות הודיות מ-1 עד 9 ובתוך המעגל החיצוני ספרות עבריות מ-**א**׳ עד **ט**׳, בהתאמה (ר׳ ציור מקורי). הציור מציג את לוח הכפל במספר 9. נתבונן בציור המופשט שמימין:




אם נעביר שורות דמיוניות, נראה:

1. בשורה הראשונה מופיע המספר 9 שהוא ערך המכפלה: $1\times9$
2. בשורה השנייה נמצא המספר 18 שהוא ערך המכפלה: $2\times9$
3. בשורה השלישית נמצא המספר 27 שהוא ערך המכפלה: $3\times9$
4. בשורה הרביעית נמצא המספר 36 שהוא ערך המכפלה: $4\times9$
5. בשורה החמישית נמצא המספר 45 שהוא ערך המכפלה: $5\times9$,

אם נמשיך ׳ללכת׳ מלמטה למעלה ונסתכל מימין לשמאל נראה את המשך לוח הכפל:

* ר׳ רשימת מקורות [6].

6. בשורה הראשונה מלמטה נמצא המספר 54 שהוא ערך המכפלה: $6\times9$
7. בשורה השנייה מלמטה נמצא המספר 63 שהוא ערך המכפלה: $7\times9$
8. בשורה השלישית מלמטה נמצא המספר 72 שהוא ערך המכפלה: $8\times9$
9. בשורה הרביעית מלמטה נמצא המספר 81 שהוא ערך המכפלה: $9\times9$
10. בשורה החמישית מלמטה, שהיא השורה הראשונה מלמעלה, חסרה הספרה אפס על מנת להשלים את לוח הכפל על-ידי המספר 90 שהוא ערך המכפלה: $10\times9$.

בספר שבעה שערים: **א.** "שער הכפל" מכיל שיטות הכפלה של מספרים שלמים; **ב.** "שער החילוק"; **ג.**"שער החיבור", שכולל גם חיבור של טור חשבוני; **ד.** "שער החיסור"; **ה.** "שער השברים", מכיל את פעולות החשבון בין השברים, כולל גם דיון מיוחד על השברים בעלי מכנה 60 או חזקה של 60; **ו.** "שער הערכים", על היחס ועל הפרופורציה; **ז.** "שער השורשים", על הוצאת השורש הריבועי, הכולל גם התייחסות למספרים אי-רציונאליים כמו שורש ריבועי של 2, 3, 5, 6 , 7 ו-8. ובו גם נספח על המעגל.

הספר בנוי כספר לימוד ומתוכו משתקפת דמותו של ר' אברהם אבן עזרא כמורה וכמחנך מצוין. ההסברים הדידאקטיים ניתנים על מנת לסייע לתלמיד בהבנת חומר תיאורטי והם מלווים בהערות כמו: "...ולהקל על התלמידים יאמר ככה...". בספר דוגמאות פתורות בהן מראה המחבר כיצד יש ליישם את השיטה ומלמד לבצע את הבדיקה של הפעולה (מאזנים, כלשונו).

נביא שתי דוגמאות של פעולת החיסור ושל פעולת הכפל מתוך הספר.
נתבונן בדוגמה של פעולת חיסור (עמ' 28-29 ב'ספר המספר'):

| | | |
|---|---|---|
| _ ב ג ד ה | | _ 5 4 3 2 |
| ט ז ג ב | כתיבה של ימינו: | 2 3 7 9 |
| ג ה ○ ג | | 3 0 5 3 |

בתרגיל זה נראה כי פעולת החיסור זהה למקובל בימינו. ההבדל הוא שאבן עזרא כותב את האותיות מימין לשמאל, כנהוג בעברית, וגם קורא לספרה **ב'** – 'הראשונה' ולספרה **ה'** – 'האחרונה', וזה בניגוד לנהוג אצלנו; את פעולת החיסור עצמה הוא מבצע משמאל לימין, גם כאן בניגוד לנהוג היום.
כמו כן, אבן עזרא לא מבדיל בין המושגים ספרה ומספר.
כך מלמד אבן עזרא לבצע חיסור בין שני מספרים:

> "כתוב החשבון שתרצה לגרוע ממנו בטור העליון וכתוב המספרים שתחפוץ לגרעם בטור השפל. ולעולם יהיה מספר האחרון שבטור העליון גדול מהמספר האחרון שהוא בטור השפל ..."

וכך הוא מסביר את הדוגמה שלעיל:

"וראוי לגרוע כל אחד מהשפלים מן העליונים, כל אחד ממעלתו.., והנה גרענו **ב'** מ- **ה'**, נשאר לנו **ג'**, כתבנו אותו תחת מעלה הרביעית. חסרנו **ג'** מ-**ד'** נשאר לנו אחד; ולא כתבנוהו, רק שמנו גלגל במקומו,כי הוצרכנו להשיב אחד אחורנית כי המספר שבטור השפל לפניו גדול משכנגדו העליון. והנה היו **י"ג**, חיסרנו ממנו **ז'** ונשארו **ו'**. רק בעבור כי החשבון הראשון שבטור השפל גדול מן הראשון, על כן הוצרכנו להשיב אחורנית אחד, ונכתוב **ה'** בטור השלישי, והנה היו למעלה **י"ב**, נחסר **ט'** ונשארן **ג'**."

דוגמה של פעולת הכפל כפי שמופע ב׳ספר המספר׳ בעמ׳ 10-11 ובצידה הגרסא העכשווית:

| | |
|---|---|
| ז ב א | 1 2 7 |
| ה ה ג | x 3 5 5 |
| ה ג ג ב ג | 3 2 3 3 5 |
| ה א א | 1 1 5 |
| א ו | + 6 1 |
| ה ה | 5 5 |
| ה ח ○ ה ד | 4 5 0 8 5 |

נסביר את מהלכי הכפל לפי הראב״ע.

קודם כופלים את המספר 355 ב-7.

התוצאות:

א) $5\times7=35$, רושמים 5 במקום היחידות ו-3 במקום העשרות;

ב) $50\times7=350$, רושמים 5 במקום העשרות ו-3 במקום המאות, את האפס לא רושמים (האם כאן יש לזה חשיבות?);

ג) $300\times7=2100$, רושמים 1 במקום המאות ו-2 במקום האלפים.
לאחר מכן כופלים את המספר 355 ב- 20.

ד-ו) 100, 1000 ו- 6000, רושמים: 1 במקום המאות ובמקום האלפים ו-6 במקום העשרת האלפים.
בסוף כופלים את המספר 355 ב- 100.

ז-ט) 500, 5000 ו- 30000 רושמים במקומות המתאימים.

בספר נמצאות בעיות רבות, במיוחד בשער ו׳ . כל בעיה נקראת – ׳שאלה׳ ודוגמה או הסבר – ׳דמיון׳.
לדוגמה, בעיה:

"שאלה. אדם יצא מעירו ונכנס במדינה אחרת. נדר, אם יכפול המקום ממונו, יתן בכל יום ב' פשוטים. לסוף ד'

ימים הלך ממונו. כמה הביא? האמת כי היה לו ב' פשוטים פחות שמינית פשוט."

הסבר: בסוף כל יום, הוכפל כספו בעיר החדשה, ובהתאם לנדרו – תרם 2 פשוטים. בתום 4 ימים נותר בלא כלום.

פתרון: נסמן את ממונו ההתחלתי ב-$x$ ונקבל את המשוואה הבאה:

$$\{[(2x-2)\cdot 2-2]\cdot 2-2\}\cdot 2-2=0$$

ופתרונה: $x=1\frac{7}{8}$.

בנספח על המעגל (עמ' 76-80 ב'ספר המספר'), כותב אבן עזרא (ההערות בסוגריים הן פירושים של חוקרים שונים):

"דע כי יש במעגל דברים רבים: האחד – קו העגול (**היקף, אצל בר חייא- קו סובב**), והשני – האלכסון (**קוטר**), והשלישי – הכפל (**המספר שיש לכפול בו את הקוטר כדי למצוא את ההיקף, כלומר, π**) והרביעי – היתר (**מיתר**), והחמישי – החץ (**לפעמים זהו מיתר, ולפעמים, זהו חלק של קוטר הנחתך על ידי מיתר**), והששי – השברים (**שטח, במקום תשבורת של בר חייא**)."

למונחים הנזכרים כאן יש להוסיף מונח 'נקודה' (מרכז המעגל), אשר הראב"ע משתמש בעצמו:

"הנה חצי האלכסון **ה'** והחץ אחד, נחסרנו מ-**ה'** ישאר **ד'** אל הנקודה".

## 'יסוד מורא'

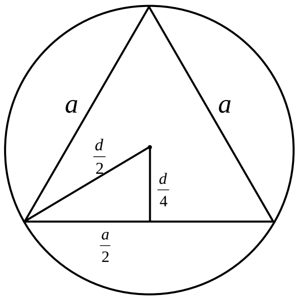
כפי שראינו מוקדש 'ספר המספר' לנושא האריתמטי הטהור, כתוב בשיטתיות ובבהירות. הספר 'יסוד מורא' אינו ספר מתמטי, אבל גם בו מביא אבן עזרא ענייני מתמטיקה. כאן הוא בעת ובעונה אחת עוסק באריתמטיקה וגיאומטריה, ורומז בהם לענייני מטאפיסיקה וחכמת אלוקים. כאן הוא מביע את "סודותיו", כלומר את רעיונותיו, בלשון קצרה ונסתרת, על דרך "המשכיל יבין".

בנספח, עוסק אבן עזרא בתכונות מעניינות של מספרים שבגימטרייה הם האותיות **א', ה', ו', י'**. לפני שהוא מגלה לנו את התכונה המיוחדת של מספר 10, נותן אבן עזרא שני 'תרגילי הכנה', והם (בשפה עכשווית):

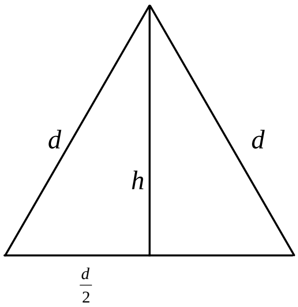
תרגיל 1

הריבוע הבנוי על צלע של משולש שווה צלעות החסום במעגל, שווה לריבוע הבנוי על גובה של משולש שווה צלעות שצלעו שווה לקוטר של אותו מעגל, כי כל אחד מהריבועים האלה שווה לשלושה רבעים של ריבוע הצלע של המשולש השני.

כמתואר בשרטוט ובהסברים:




$$\left(\frac{d}{4}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2=\frac{3}{4}d^2$$

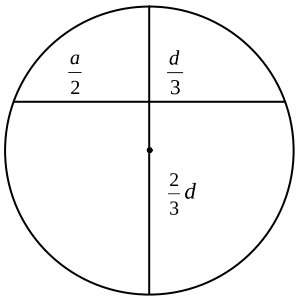



$$\left(\frac{d}{2}\right)^2+h^2=d^2 \Rightarrow h^2=\frac{3}{4}d^2$$

תרגיל 2

אם נעביר מיתר מאונך לקוטר בשליש אורכו, יהיה סכום הריבוע הבנוי על המיתר עם הריבוע הבנוי על החלק הקטן של הקוטר, שווה לריבוע הבנוי על הקוטר כולו.

כמתואר בשרטוט ובהסברים:




$$\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}=\frac{1}{3}d\cdot\frac{2}{3}d \Rightarrow \frac{a^2}{4}=\frac{2}{9}d^2 \Rightarrow a^2=\frac{8}{9}d^2$$

אכן, מתקיים: $a^2+\left(\frac{d}{3}\right)^2=d^2$

מתברר, כי 10 הוא המספר היחיד המקיים את התנאי הבא:

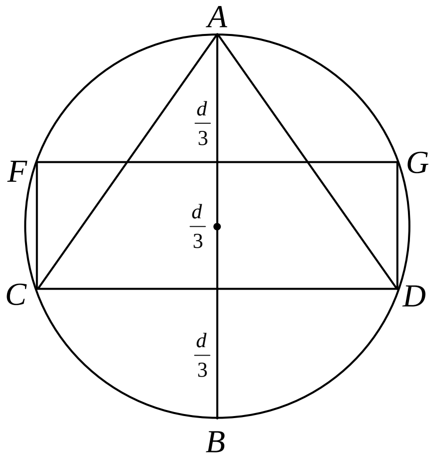
"ובעגול שהוא אלכסונו עשרה, בהוציאך החץ אל שתי שלישיות האלכסון, אז תמצא שברי המשולש או שברי הצלע המרובע כקו העגול".

הנה ההסבר:

נתון מעגל שקוטרו 10. נחלק קוטר המעגל $AB$ לשלושה חלקים שווים על ידי המיתרים $CD$ ו- $FG$ (ר' שרטוט).

בונים מלבן $FGDC$ ומשולש שווה שוקיים החסום במעגל $ACD$.

לפי הבעיה, מידת שטח המשולש $ACD$, השווה לשטח המלבן $FGDC$, שווה למידת היקף המעגל.




שטח המשולש $ACD$:

$$S=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{3}d=a\cdot\frac{d}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}d^2$$

שטח המלבן $FGDC$:

$$S=a\cdot\frac{d}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{9}d^2$$

אם $d=10$, יהיה: $S=\dfrac{200\sqrt{2}}{9}$

היקף המעגל: $C=3\frac{1}{7}\cdot d$

ואם $d=10$, יהיה: $\mathrm{C}=\dfrac{220}{7}=31\frac{3}{7}$

מכאן, $S(10)=C(10)$ וזאת הסגולה המיוחדת הגיאומטרית של המספר 10.

ניתוח הבעיה: הוכחנו בדרך החישוב, כי במעגל בעל קוטר 10 היקף המעגל שווה **מספרית** לשטחו של המשולש. אם ניקח מעגלים בעלי קוטר שונה מ-10 (גדול או קטן מ-10), נראה שהיקף המעגל ישתנה ביחס ישר לשינוי הקוטר, ואילו שטח המשולש ישתנה ביחס ריבועי, לכן ברור כי התנאי של שוויון מספרי בין שטח המשולש להיקף המעגל מתקיים רק במעגל שקוטרו 10.

ננסה להביא כאן הוכחה גראפית לכך שהשוויון בין שטח המשולש, המוגדר לעיל, לבין היקף המעגל, מתקיים רק במקרה אחד ויחיד (עבור קוטר 10).

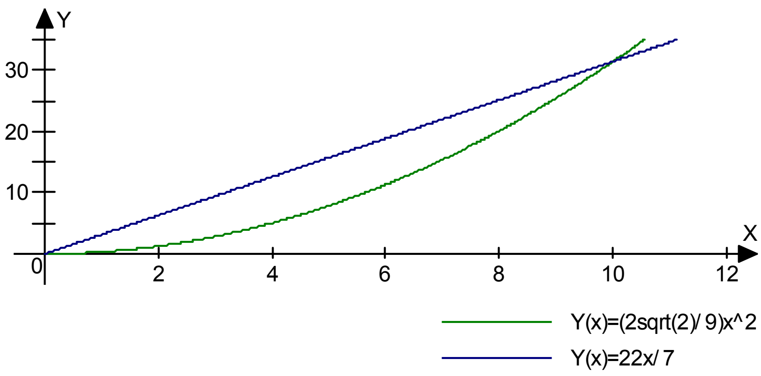
במערכת צירים $XOY$ נשרטט גרפים של שתי הפונקציות:

$S(x)=\dfrac{2\sqrt{2}}{9}\cdot x^2$ – שטח המשולש, כאשר $x$ – אורך קוטר המעגל,

$C(x)=\dfrac{22}{7}\cdot x$ – היקף המעגל.

ברור שצורת הגרף של $S(\mathrm{x})$ היא פרבולה, והגרף של $C(\mathrm{x})$ הוא קו ישר.

לקו ישר ולפרבולה ייתכנו לא יותר משתי נקודות חיתוך. אכן, כאן שני הגרפים נחתכים בשתי נקודות: ראשית הצירים ו- $\left(10,\ 31\frac{3}{7}\right)$.



מתוך השרטוט ניתן בקלות להבחין כי כאשר קוטר המעגל קטן מ-10, המידה המספרית של היקף המעגל תהיה יותר קטנה מהמידה המספרית של שטח המשולש, ועבור קוטר הגדול מ-10 המצב מתהפך.

לדוגמה, הגדלת קוטר המעגל פי שניים, תיצור קוטר של 20, אך שטח המשולש לא יגדל פי שניים, אלא פי ארבעה.

אין ספק, כי הראב"ע, כמתמטיקאי הבקיא בתורת המספרים, הבין וידע זאת. הוא הביא את ההברקה החישובית כדי לציין את הסגולה של המספר 10.

הוא ממשיך ומציג עוד בעיה:

"ריבוע השטח של המשולש שלעיל, כאשר קוטר המעגל הוא 15, שווה ל-5000 בדיוק. ריבוע אורך המעגל שקוטרו 10 הוא: $987+\frac{5}{9}+\frac{8}{81}$ והאורך עצמו: $31°\ 25'\ 36''\ 50'''$. שטח המשולש שווה-השוקיים הנ"ל מתייחס לאורך המעגל, כמו הקוטר ל- 10."

א. אם $d = 15$, יהיה ריבוע שטח המשולש: $S=\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\cdot 15^2\right)^2=5000$

ב. אם $d = 10$, יהיה ריבוע אורך המעגל: $C^2=\left(\frac{2\sqrt{2}}{9}\cdot 10^2\right)^2=987+\frac{5}{9}+\frac{8}{81}$

ג. ואורך המעגל: $C=\frac{200\sqrt{2}}{9}=31+\frac{25}{60}+\frac{36}{60^2}+\frac{50}{60^3}$

ד. והיחס: $\frac{S}{C}=\frac{\frac{2\sqrt{2}}{9}d^2}{\frac{20\sqrt{2}}{9}d}=\frac{d}{10}$

# נספח

## הפלינדרום של ר' אברהם אבן עזרא

המילה 'פלינדרום' היא הרכבה של שתי מילים יווניות: palin – שוב, ו-dromos – ריצה.

פלינדרום (מתוך המילון החדש מאת אבן-שושן) – זה חרוז או מאמר שאפשר לקרוא אותו ישר והפוך, למשל, הפלינדרום הנודע של אברהם אבן עזרא:

**"אָבִי אֵל חַי שֹׁמֵּד לָמָּה מֶלֶךְ מָשִׁיחַ לֹא יָבֹא?"**

נקרא כך גם משמאל לימין:

**א ב י א ל ח י ש מ ד ל מ ה מ ל ך מ ש י ח ל א י ב א**

## מספר המספרים הפלינדרומיים

ניתן לפגוש פלינדרומים במילים (דוד, שמש, madam) וגם במספרים. לדוגמה: 88, 12321, 237732.

ברור, כי מספר המספרים הפלינדרומיים בעלי שתי ספרות הוא 9. (11,22,33,…,99)

כמה מספרים פלינדרומיים בעלי 5 ספרות, 6 ספרות, 7 ספרות, קיימים?

כיצד ניתן להמציא נוסחה לחישוב של מספר מספרים פלינדרומיים בעלי $n$ ספרות?

ניתן לעיין באוסף '50 בעיות חודש ופתרונותיהן', בהוצאת המרכז הארצי למתמטיקה – "קשר חם", בעיה מס' 6.

## הפיכת מספרים לפלינדרומיים

קיימת שיטה, די פשוטה, להפיכת מספרים טבעיים למספרים פלינדרומיים:

יש לחבר את המספר הנתון עם המספר הרשום בסדר ספרות הפוך.

לפעמים מספר פלינדרומי מתקבל לאחר צעד אחד, לפעמים יש לחזור על אותה הפעולה מספר פעמים:

83 + 38 = 121;

57 + 75 =132, 132 + 231 = 363;

78 + 87 = 165, 165 + 561 = 726, 726 + 627 = 1353, 1353 + 3531 = 4884;

892 + 298 = 1190, 1190 + 0911 = 2101, 2101 +1012 = 3113.

עד היום, אף אחד עוד לא הוכיח, עבור אילו מספרים השיטה "עובדת", ועבור אילו היא אינה "עובדת".

ידוע רק, שאם נבצע, בעזרת מחשבים, חיבורים אלה עשרה מיליון פעמים, לא נוכל להפוך את המספר 196 למספר פלינדרומי. אבל, מי יודע, אולי בכל זאת הדבר אפשרי, ודווקא ברגע זה מישהו הצליח להפוך 196 למספר פלינדרומי!

## תכונות מעניינות של מספרים פלינדרומיים

בין המספרים הפלינדרומיים יש מספרים בעלי תכונות מעניינות.

לדוגמה: **11** ו- **121**.

החזקות הראשונות (2, 3, 4) של 11 גם הן מספרים פלינדרומיים:

$11^2 = 121,\ 11^3 = 1331,\ 11^4 = 14641.$

המספר 121 , לפי כל בסיס טבעי, הגדול מ-2 , מהווה ריבוע של מספר.

דוגמאות:

$(121)_3 = 1\cdot 3^2 + 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0 = 9 + 6 + 1 = 16 = 4^2$

$(121)_8 = 1\cdot 8^2 + 2 \cdot 8^1 + 1 \cdot 8^0 = 64 + 16 + 1 = 81 = 9^2$

$(121)_{11} = 1\cdot 11^2 + 2 \cdot 11^1 + 1 \cdot 11^0 = 121 + 22 + 1 = 144 = 12^2$

ובצורה כללית:

$(121)_B = 1\cdot B^2 + 2 \cdot B^1 + 1 \cdot B^0 = B^2 + 2B + 1 = (B + 1)^2$

## תאריכים פלינדרומיים

יחד עם מספרים פלינדרומיים קיימים תאריכים פלינדרומיים. אחד מהם חל לא מזמן: **30.11.03.** כתבתי אותו על הלוח (אני מלמדת מתמטיקה ביחידה הקדם אקדמית של אוניברסיטת חיפה), ושאלתי את תלמידיי: מתי, לפי דעתכם, יחול התאריך הפלינדרומי הבא? מתי חל התאריך הקודם? השאלה לא הייתה כל- כך פשוטה, בכיתה התפתח דיון בנושא תאריכים: תלוי כיצד רושמים, האם חייבים לרשום שנה, אם כן, אז האם את כל 4 ספרות או רק שתיים אחרונות, האם חייבים לרשום חודש כמספר דו-ספרתי?

הגענו למסקנה, על-פי הגדרות והסכמים שקיבלנו בכיתה, שהתאריך הפלינדרומי הבא יחול כעבור 6 שנים ו-11 חודשים, כלומר, ב- **01.11.10.** ואחריו, שניים, בכל שנה: **(!) 11.11.11** ו- **21.11.12** ושוב הפסקה.

לפני שנתיים וחצי, ביום רביעי, ב- 20 לחודש פברואר שנת 2002 בשעה 8 ו- 2 דקות בערב, במשך 60 שניות, זכינו בתאריך מעניין :

**200220022002** – 20:02, 20/02, 2002

מתי נזכה ל- 60 שניות נוספות כאלה ?

## קילומטראז' פאלינדרומי

(מתוך ספרו של שמואל אביטל "מתמטיקה בהנאה")

בנסיעה במכונית עם אביה התבוננה מירי במד-הקילומטרים וגילתה שהמספר הוא : 15951.

"אבא" - פנתה אל אביה - "הרואה אתה מספר זה?"

"כן, ומה בכך ?" הגיב האב.

"מספר זה הוא מסוג המספרים, שהמורה קורא להם פלינדרומיים, הוא נקרא מימין לשמאל ומשמאל לימין באותו אופן."

מירי ואביה נסעו נסיעה ארוכה לאורך דרך יפה מאוד. האב נהג במהירות הרגילה בכבישים, אבל מירי החליטה להתבונן מדי פעם במד-הקילומטרים, שמא תגלה שוב מספר מעניין. ואומנם, לאחר שעתיים של נסיעה, הראה המונה שוב מספר פלינדרומי. בהנחה שהמכונית נסעה במהירות קבועה, האם תוכלו לגלות מה הייתה מהירות הנסיעה של המכונית?

**הערה:** כל מספר פאלינדרומי בעל מספר זוגי של מספרים מתחלק ב-11.

## רשימת מקורות


1. בן-עמי צרפתי, ג. (1968), *מונחי המתמטיקה בספרות המדעית העברית של ימי הביניים.* ירושלים : הוצאה ע"ש מאגנס, האוניברסיטה העברית.
2. ר' בר חייא, א.(1913), *חיבור המשיחה והתשבורת (עם פירושים של יחיאל מיכאל הכהן גוטמן).* ברלין : הוצאה לאור של חברה מקיצי נרדמים.
3. ר' בר חייא, א. (1952), *יסודי התבונה ומגדל האמונה.* מדריד-ברצלונה.
4. ר' בר חייא, א. (1851), *ספר העיבור.* לונדון : הוצאה של צבי בן יחזקאל פיליפאווסקי.
5. ר' בר חייא, א.(1971), *הגיון הנפש העצובה.* ירושלים : מוסד ביאליק.
6. ר' אבן עזרא, א. (1895), *ספר המספר(עם פירושים של משה זילברברג).* פרנקפורט : הוצאת קאופמן.
7. ר' אבן עזרא, א. (2002), *יסוד מורא וסוד תורה.* רמן-גן : הוצאת אוניברסיטת בר-אילן
8. ר' אבן עזרא, א. (1894), *קובץ חכמת הראב"ע.* ווארשא : הוצאת אחיאסף
9. בן עזרא, א. (2002), *אמר אברהם המחבר (פרקים על פירושי הראב"ע).* אקדמון
10. שישא, א. (1977), *מתמטיקה ומתמטיקאים.* תל-אביב : הוצאת מסדה
11. פרויט, מ. (2004), רבי אברהם אבן עזרא. *מספר חזק 2000, כתב עת להוראת המתמטיקה בבית הספר היסודי, מס' 7, (עמ' 6-12).*
12. Levey, M. (1954), Abraham Savasorda and his Algorism: A Study in Early European Logistic. *Osiris (jornal), num.11, (pg.50-64), Belgium.*
13. Levey, M. (1966), *The Algebra of Abu Kamil in a Commentary by Mordecai Finzi (with Hebrew text)***,** Madison, Milwaukee and London: The University of Wisconsin.
14. Ibn Esra, A.(1921), *Buch der Einheit (Sefer ha-Echad).* Berlin: Welt-Verlag
15. Menninger, K. (1969), *Number Words and Number Symbols.* Cambridge
16. Freitag, H&A. (1966), *The Number Story*. Washington: National Council of Teachers of Mathematics
17. Jushkevich, A. (1961) *Istorija matematiki v srednie veka*. Moskwa: Gosizdat