הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי

הנושא: "בעית ירושת הגמלים"

הוכן ע"י: מאיר קשי.

תקציר: בחומר מוצגת בעית ירושת הגמלים: חלוקה בדידה של כמות נתונה לפי יחס קבוע.
מובא פתרון הבעיה והכללתה.
כן מובא רקע היסטורי לבעיה: פפירוס רינד ושברי יחידה.

מילות מפתח: בעית ירושת הגמלים, שברים, כפל שברים, חיבור שברים, משוואות דיאופנטיות, חלוקה פרופורציונית, שברי יחידה, פפירוס רינד, היסטוריה של המתמטיקה.

החומר הוגש במסגרת:
"קשר-חם", הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה, שנה"ל תשנ"ד, מרץ 1994.
"קשר-חם", הכנס הארצי של מרכזי המקצוע מתמטיקה, שנה"ל תשנ"ה, אפריל 1995.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 4 עמודים.

בעיית ירושת הגמלים - פתרונה, הכללתה ומעט היסטוריה

תרגום מאנגלית של פרק מתוך הספר:
N. Movshovitz-Hadar and J. Webb, How Come?!, (in press) Janson Publication.

<u>צוואתו של הבדואי</u>

א. בדואי זקן שהיו לו 17 גמלים מת והשאיר צוואה לשלושת בניו. כאשר קראו את הצוואה נראה הדבר כחידה לשלושת בניו. וכך נאמר: *"את כל 17 גמליי יש לחלק בין בניי באופן הבא: $\frac{1}{2}$ לבן הבכור, $\frac{1}{3}$ לבן האמצעי ו- $\frac{1}{9}$ לבן הצעיר".*
הבנים שמאוד רצו לכבד את הצוואה לא מצאו דרך לעשות זאת.
האם אתם רואים מדוע? האם תוכלו לעזור?

ב. וכך, הם הלכו לשייך השבט לבקש עזרה. השייך ביקש ארכה למחשבה ואחרי שלושה ימים קרא לשלושת הבנים ואמר: *"אשאיל לכם את גמלי האחד והיחיד. כך יהיו לכם 18 גמלים. הבכור יקבל $\frac{1}{2}$ כלומר 9 גמלים, האמצעי יקבל $\frac{1}{3}$ כלומר 6 גמלים והצעיר יקבל $\frac{1}{9}$ כלומר שני גמלים. ביחד יהיו לכם 17 גמלים (9+6+2=17), ואני אקח חזרה את גמלי. האם הרעיון נראה לכם?"* שלושת הבנים היו מאוד מרוצים. כיצד הצליח השייך במקום שהבנים (וייתכן שגם אתם) חשבו שהדבר בלתי אפשרי?

<u>הסבר</u>

א. באופן טבעי, הבנים רצו לקבל גמלים חיים, אך לביצוע הצוואה כלשונה, חייבים היו לבתר שלושה גמלים, ולתת לבן הבכור $8\frac{1}{2}$ גמלים, לבן האמצעי $5\frac{2}{3}$ גמלים ולבן הצעיר $1\frac{8}{9}$ גמלים. האפשרות של מכירת שמונה גמלים והשארת תשעה לחלוקה אינה מתיישבת עם הצוואה שאמרה: *"את כל 17 גמליי יש לחלק..."* (גם אז הבכור היה מקבל $4\frac{1}{2}$ גמלים), כמו כן, קניית גמל אחד, היא אומנם דרך טובה לביצוע הצוואה, אך לא ברור אם היה להם כסף לכך.

ב. השייך למעשה לא הוציא לפועל את הצוואה. כאשר קיבל הבכור 9 גמלים, הוא לא קיבל $\frac{1}{2}$ מ- 17 $\left(\frac{9}{17} \neq \frac{1}{2}\right)$, האמצעי לא קיבל $\frac{1}{3}$ מ- 17 $\left(\frac{6}{17} \neq \frac{1}{3}\right)$ והצעיר לא קיבל $\frac{1}{9}$ מ- 17 גמלים $\left(\frac{2}{17} \neq \frac{1}{9}\right)$. אין דרך לחלק את הגמלים בהתאם לצוואה ולהשאיר אותם בחיים.
יתר על כן, כל אחד קיבל יותר ממה שהיה אמור לקבל ולא נותר אף גמל. בצוואה דובר על $\frac{17}{18} = \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ מתוך 17 הגמלים, כלומר נותר $\frac{1}{18}$ מ- 17 הגמלים שלא יועד לאף אחד מהבנים. זה מסביר את הפתרון היפה שהשייך מצא.

הערות:

1. הפתרון של השייך הוא פתרון נכון אך לא לבעיה שהוצגה. הפתרון מכל מקום שומר על היחסים בין החלקים שהבנים היו אמורים לקבל בהתאם לצוואת אביהם:
$\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9} = 9:6:2$.

2. לפני הצגת בעיה זו, מעניין להציג גירסה קלה יותר המחליפה את הירושה הבדידה של 17 גמלים בירושה רציפה כמו 17 ק״ג של צמר גמלים. הבעיה הפסיכולוגית של הרג גמלים אינה מתעוררת כאן, אבל התלמיד יגלה שהצוואה פוסקת לבנים רק $\frac{17}{18}$ מהרכוש שהיה לאב.

3. קבוצה אחרת של שלושה שברים שיש להם תכונה דומה לזו שהוצגה כאן: לחלק 11 לשלושה חלקים שיהוו $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6}$ ממנו בהתאמה.

תרגיל מעניין הוא לנסח ולפתור את הבעיה הכללית שמקרה זה הוא המקרה הפרטי שלה. כלומר, למצוא לשלושה מספרים טבעיים את ההופכים שלהם (כלומר שברי יחידה או שברים שהמונה שלהם אחד) שסכומם הוא שבר בו מספר הגמלים הוא המונה ומספר הגמלים ועוד אחד הוא המכנה. במונחים אלגבריים, אנו מחפשים ארבעה מספרים טבעיים a, b, c, d כך ש-
$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=1$. משוואות כאלה נקראות משוואות דיאופנטיות (ראה רקע היסטורי להלן).
ברור שפתרון פשוט למשוואה זאת הוא a=b=c=d=4 וכך תתקבל קבוצה אחרת של מספרים לבעיית צוואת הבדואי: 11 גמלים שיחולקו שווה בשווה בין שלושת הבנים. צמצום בעיה זו לשניים או לשלושה שברי יחידה שסכומם 1 הוא בעיה מעניינת כשלעצמה. קל לראות שלכל משוואה הדורשת שיוויון בין 1 לבין סכום של n הופכיים של מספרים טבעיים, יש מספר סופי של פתרונות. זאת מפני שמצד אחד, כל אחד מהמספרים השלמים גדול או שווה ל-2 (אחרת הסכום יכיל ביטוי $\frac{1}{1}$ אשר בהכרח יגרום לכך שכל אחד משאר ההופכיים ישווה לאפס, דבר שלא יתכן).

מצד שני ההופכי הגדול ביותר חייב להיות לפחות $\frac{1}{n}$ (אחרת הסכום של הארבעה יהיה קטן מ-1) ומכאן שהמספר השלם הקטן ביותר הוא לכל היותר n.
כאשר מנתחים את מספר הפתרונות לפי המספר השלם הקטן ביותר, הואיל ומספר זה חסום על ידי 2 ועל ידי n, חייב מספר הפתרונות להיות סופי.
נחזור למשוואה בארבעה משתנים. מניחים ש- $1 < a \le b \le c \le d$ ונבחן את האפשרויות עבור a=2,3,4. נתייחס באופן דומה לחסמים העליונים והתחתונים במשוואות הנותרות.

$$a=4 \;\Rightarrow\; \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{3}{4} \qquad d=4 \quad c=4 \quad b=4 \;\Rightarrow$$

$$a=3 \;\Rightarrow\; \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{3} \;\Rightarrow\; b=4 \text{ או } b=3$$

הערה 1: כי אם נניח $b \ge 5$, אז מתוך $b \le c \le d$
ינבע: $c \ge 5\,,\ d \ge 5$
ואז: $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d} \le \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

מתוך שרשת דומה של שיקולי דדוקציה מתקבל $c = 4$ כאשר $b = 4$ או $4 \le c \le 6$ כאשר $b = 3$
והפתרונות המתאימים הם: $(a,b,c,d) = (3,3,4,12)\,,\ (3,3,6,6)\,,\ (3,4,4,6)$

$$a = 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 3 \le b \le 6$$

(אם $b = 2$ אין פתרון כי אז הסכום של $\frac{1}{a}$ ו- $\frac{1}{b}$ הוא 1). משיקולים דומים נקבל עבור $b = 3$
את הפתרונות : $(a,b,c,d) = (2,3,7,42)$, $(2,3,8,24)$, $(2,3,9,18)$, $(2,3,10,15)$, $(2,3,12,12)$

עבור $b = 4$: $(2,4,5,20)$, $(2,4,6,12)$, $(2,4,8,8)$
עבור $b = 5$: $(2,5,5,10)$
עבור $b = 6$: $(2,6,6,6)$

<u>הערה 2</u> : א. מתקבלים 14 פתרונות שונים.
ב. יש לשים לב שהמקרים $(3,4,4,6)$ $(2,3,10,15)$ מצריכים שני גמלים של השייך
כדי לפתור את הבעיה באותו "פטנט" שכן $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{10}{12}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}=\frac{28}{30}$

כלומר במקרים אלה המכנה של סכום השברים גדול ב- 2 ממספר הגמלים שבירושה (במקרה האחד 30 ובשני 12).

<u>רקע היסטורי</u>

המצרים נהגו להעמיד אתגרים של כתיבת שבר כסכום הפכיים של טבעיים. נראה שזה השלב המוקדם ביותר בהתפתחות תורת המספרים. לתורת המספרים שייכות משוואות כמו זו שפתרנו בבעייתנו. פפירוס רינד, מסמך מתמטי מצרי שנכתב ב- 1650 לפנה"ס והתגלה ב- 1858, כולל טבלה בה מוצג כל שבר מהצורה $\frac{2}{n}$ כסכום שברי יחידה, לכל n אי-זוגי $5 \le n \le 101$

(לדוגמא : $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$).

לא ברור כיצד הגיעו לטבלה זו ומדוע המכנה הוגבל ל : $5 \le n \le 101$.

מלבד חלוקת כל שבר כנ"ל בצורה הטריביאלית $\frac{2}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$, ניתן לחשב לכל שבר כנ"ל

שני שברי יחידה שסכומם $\frac{2}{n}$: $\frac{2}{n}=\frac{1}{b}+\frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{2}{n}-\frac{1}{a}=\frac{2a-n}{a\cdot n}$

כך למשל עבור $n = 3$ $\frac{1}{b}=\frac{2\cdot a-3}{a\cdot 3} \Rightarrow a=2$, $b=6$

ואכן $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$

הפיתגוריים היוונים (500 לפנה"ס) אשר החזיקו בדעה שהעולם נשלט על ידי המספרים השלמים, חקרו שאלות "מעוררות" רבות אשר היוו מסד להתפתחות הקדומה של תורת המספרים. שלשות פיתגוריות, מספרים ראשוניים, תכונות התחלקות, מספרים חברים, מספרים מושלמים, מספרים מצולעים - בכולם עסקו כחלק מלימוד תכונות נסתרות של המספרים השלמים.
דיאופנטוס מאלכסנדריה (במאה השלישית) היה התיאורטיקן האמיתי הראשון שעסק בתורת המספרים. אחת מעבודותיו המתמטיות המרשימות מאוד שנכתבה ביוונית ומאוחר יותר תורגמה לשפות אירופאיות רבות, היתה אריתמטיקה (Arithmetica). ספר זה תורגם ללטינית ב- 1670.

באחד העותקים שלו רשם פייר דה-פרמה (Pierre de Fermat) את הערת השוליים המפורסמת בדבר אי קיומם של מספרים טבעיים a,b,c,n כך ש- $a^n + b^n = c^n$ עבור $n \geq 3$, מבלי שהוכיח אותה. הבעיה נבעה מהבעיה השמינית של דיאופנטס בכרך הראשון של אריתמטיקה: להציג ריבוע של מספר כסכום שני ריבועים. טענתו של פרמה העסיקה מתמטיקאים במשך יותר מ- 300 שנה. נסיון אחרון להוכחתה נעשה ב- 1993. הספר אריתמטיקה מכיל פתרון ליותר מ- 100 בעיות בהן יש צורך במציאת פתרונות רציונאליים חיוביים למשוואות ממעלה ראשונה, שניה ושלישית בנעלם אחד, שני נעלמים או שלושה. השיטה לפתרון שונה מאוד מבעיה אחת לשניה ומציגה את הרבגוניות בה ניחן דיאופנטס.
בימינו, בדרך כלל משתמשים במונח משוואות דיאופנטיות למשוואה שבה יותר מנעלם אחד, שפתרונותיה מצטמצמים למספרים טבעיים.

<u>מקורות</u>

1) Movshovits – Hadar, N. & Webb, J. (1993). *Foundation and Applications*: *The Problem Will*, In Movshovitz – Hadar, N. & Webb, J . How come?. Jenson Publication.