הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תימטי

הנושא : **חתכי חרוט**

הוכן ע״י : ד״ר חמוטל דוד.

תקציר : בחומר מוצגים ארבעת חתכי החרוט : פרבולה, היפרבולה, אליפסה ומעגל. מובאות שתי הגדרות אנליטיות לכל אחד מן העקומים כמקומות גיאומטריים, וניתן הסבר לשקילות של ההגדרות הללו לחתכי החרוט המתאימים להם.
בנוסף, מודגם כיצד ניתן לקבל כל אחד מהעקומים באמצעות קיפולי נייר, וכיצד ניתן לזהות את הפרבולה בסדרה של מעגלים וישרים ואת ההיפרבולה והאליפסה בסדרות של מעגלים.
כמו כן קיימת הפניה לאתרי אינטרנט הכוללים יישומונים הרלוונטיים לחומר המוצג.

מילות מפתח : היסטוריה של המתמטיקה, מנכמוס, אוקלידס, אפולוניוס, גלילאו, קפלר, ניוטון, דנדלין, גיאומטריה אנליטית, חתכי חרוט, מעגל, אליפסה, היפרבולה, פרבולה, מקום גיאומטרי, מוקד, מדריך, אקסצנטריות, קיפולי נייר, שילוב מחשב, אינטרנט, יישומונים - Applets.

החומר הוגש במסגרת : בי״ס קיץ בנושא ״שילוב ההיסטוריה של המתמטיקה בהוראה״, שנה״ל תשס״ד - קיץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה : 12 עמודים.

חתכי חרוט

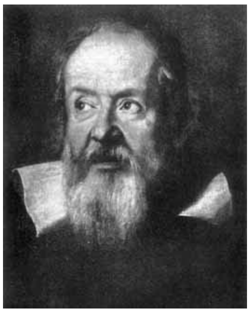
הקדמה היסטורית

כאשר משתמשים בשם 'חתכי חרוט' לתיאור עקומים, מתכוונים אל הפרבולה ההיפרבולה והאליפסה. עקומים אלה נחקרו לראשונה על-ידי מנכמוס (380-320 לפנה"ס) בעת שעסק בניסיון לפתור את בעיית "הכפלת הקוביה". גם אוקלידס (325-265 לפנה"ס) חקר עקומים אלה. את שמותיהם קיבלו מהמתמטיקאי והאסטרונום היווני אפולוניוס (262-190 לפנה"ס). כולם הכירו בעובדה שעקומים אלה הינם חתכים של חרוט חקרו את תכונותיהן כצורות גיאומטריות במישור. אפולוניוס חקר בין השאר את תכונות המשיקים לעקומים אלה. חקירותיו פורסמו בשמונה ספרים הנקראים: 'חתכי החרוט'. הספר השמיני לא שרד ולא הגיע אפילו לידיהם של המתמטיקאים בתקופה הערבית. ארבעת הספרים הראשונים שרדו בשפת המקור ושבעת הספרים הראשונים תורגמו לערבית ושרדו עד ימנו. במאות השש-עשרה והשבע-עשרה גלילאו (1564-1642),קפלר (1571-1630) וניוטון (1643-1727) גילו תכונות פיזיקליות ומכניות של עקומים אלה. ניתן למצוא הרחבה על תכונות אלה למשל באתר:

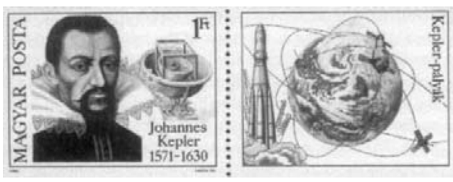
http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/newtonkepler.html

אפולוניוס מפרגה
(262-190 לפנה"ס)

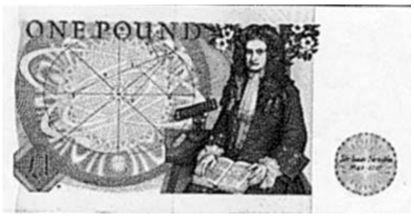
אוקלידס
(325-265 לפנה"ס)



גלילאו גליליי
(1564-1642)



ג'והנס קפלר
(1571-1630)



אייזיק ניוטון
(1643-1727)

I. הסדנה נקראת בשם: **חתכי החרוט** הבה נצפה בהם:

הפעילו את היישומונים (applets) הבאים:

http://mathdemos.gcsu.edu/family_of_functions/conic_gallery.html

http://www.jalacy.com/conics/java.shtml

- נסו לענות על השאלה:

אלו הם החתכים האפשריים של חרוט (אינסופי ישר וכפול)?

____

____

- הסבירו כיצד מתקבל כל אחד מהם:

____

____

____

____

- הגדירו: פרבולה, היפרבולה ואליפסה:

____

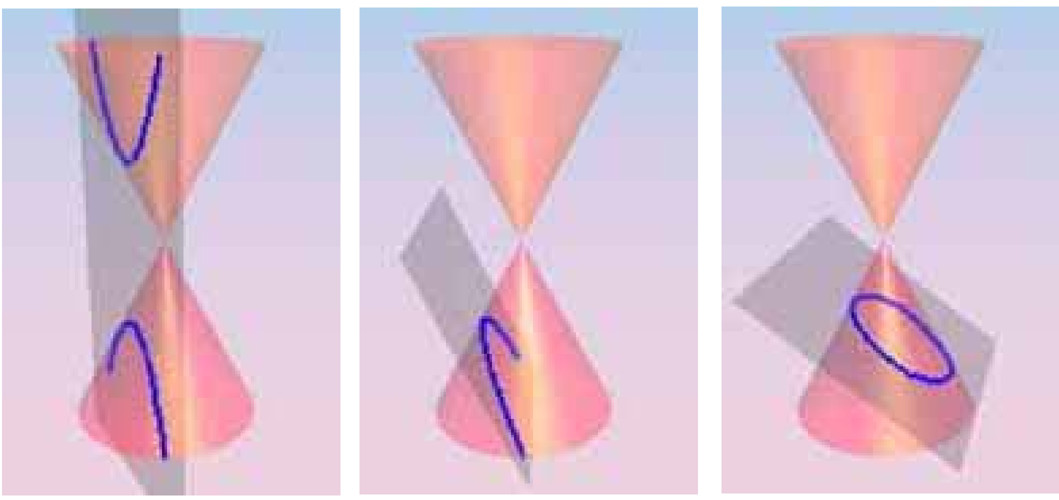
____

____

____

____

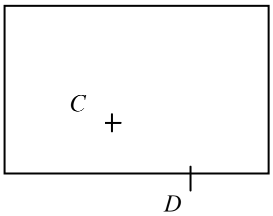
____



II. הבה נשתעשע ב**קיפולי נייר**:

לכל אחד מכם דף נייר מלבני לבן, דף נייר מלבני ועליו משורטט מעגל, ועיגול לבן.

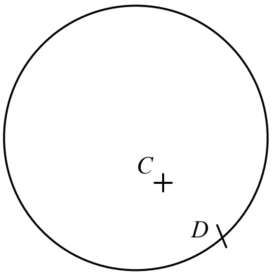
- על דף הנייר הלבן:



- סמנו נקודה C בקרבת אחת משפות הדף, כמתואר בציור:
- סמנו נקודה D על שפת הדף אליה התייחסתם קודם;
- קפלו את הדף כך שהנקודה C תתלכד עם הנקודה D;
- פתחו את הקפל וסמנו נקודה D אחרת על שפת הדף.
- שוב קפלו את הדף כך שהנקודה C תתלכד עם הנקודה שסימנתם על שפת הדף.
- חיזרו על התהליך עוד מספר פעמים.

מה קיבלתם?

כדי לראות את התמונה שיוצרים הקפלים באופן ברור מומלץ לעבור עליהם בעזרת עפרון וסרגל.

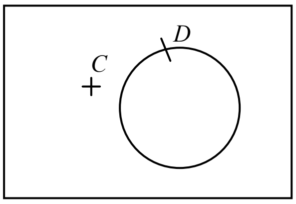


- על העיגול הלבן:

- סמנו נקודה C פנימית למעגל, כמתואר בציור:
- סמנו נקודה D על המעגל;
- קפלו את הדף כך שהנקודה C תתלכד עם הנקודה D;
- פתחו את הקפל וסמנו נקודה D אחרת על שפת המעגל.
- שוב קפלו את הדף כך שהנקודה C תתלכד עם הנקודה שסימנתם על המעגל.
- חיזרו על התהליך עוד מספר פעמים.

מה קיבלתם?

- על דף הנייר עליו משורטט מעגל:



- סמנו נקודה C חיצונית למעגל, כמתואר בציור:
- סמנו נקודה D על המעגל;
- קפלו את הדף כך שהנקודה C תתלכד עם הנקודה D;
- פתחו את הקפל וסמנו נקודה D אחרת על שפת המעגל.
- שוב קפלו את הדף כך שהנקודה C תתלכד עם הנקודה שסימנתם על המעגל.
- חיזרו על התהליך עוד מספר פעמים.

מה קיבלתם?

צפו גם ביישומון שבאתר: http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/conics.html

אילו תכונות גיאומטריות של העקומים תוכלו להסיק מקיפולי הנייר?

III. ההגדרות הבאות **של העקומים כמקומות גיאומטריים במישור** מוכרות לכולנו:

קבוצה א:

- **פרבולה** היא מקום גיאומטרי של נקודות אשר מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) שווים זה לזה.
- **אליפסה** היא מקום גיאומטרי של נקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדים) הוא קבוע.
- **היפרבולה** היא מקום גיאומטרי של נקודות אשר הפרש מרחקיהן משתי נקודות נתונות (מוקדים) הוא קבוע.
- **המעגל** מתקבל כמקרה פרטי של האליפסה כאשר שני המוקדים מתלכדים.

ואפשר גם כך:

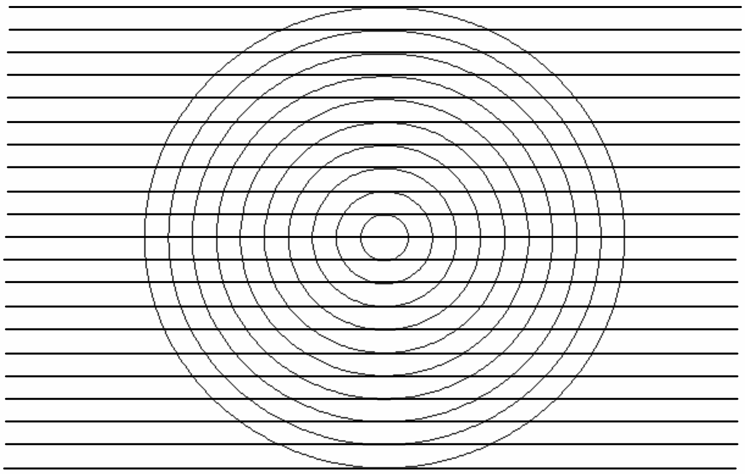
קבוצה ב:

- **פרבולה** היא מקום גיאומטרי של נקודות אשר היחס בין מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) שווה לאחד.
- **אליפסה** היא מקום גיאומטרי של נקודות אשר היחס בין מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) קטן מאחד.
- **היפרבולה** היא מקום גיאומטרי של נקודות אשר היחס בין מרחקיהן מנקודה נתונה (מוקד) ומישר נתון (מדריך) גדול מאחד.
- **המעגל** מתקבל כמקרה פרטי של האליפסה עם יחס השווה לאפס.

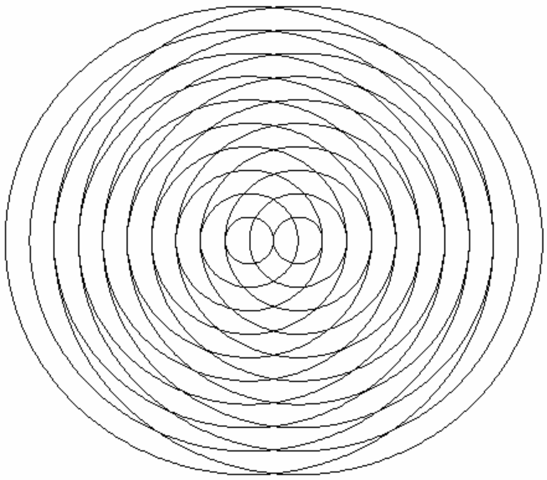
היחס בין המרחקים נקרא: אקסצנטריות. בהמשך הפעילות נתייחס אל הגדרה זו ונבין את מקורה.

IV. פרבולה, היפרבולה ואליפסה בסדרות של מעגלים (וישרים):

- היעזרו בהגדרה של פרבולה מקבוצה א וסמנו בשרטוט הבא נקודות הנמצאות על **פרבולה/פרבולות**:



- היעזרו בהגדרה של היפרבולה מקבוצה א וסמנו בשרטוט הבא נקודות הנמצאות על **היפרבולה/היפרבולות**:



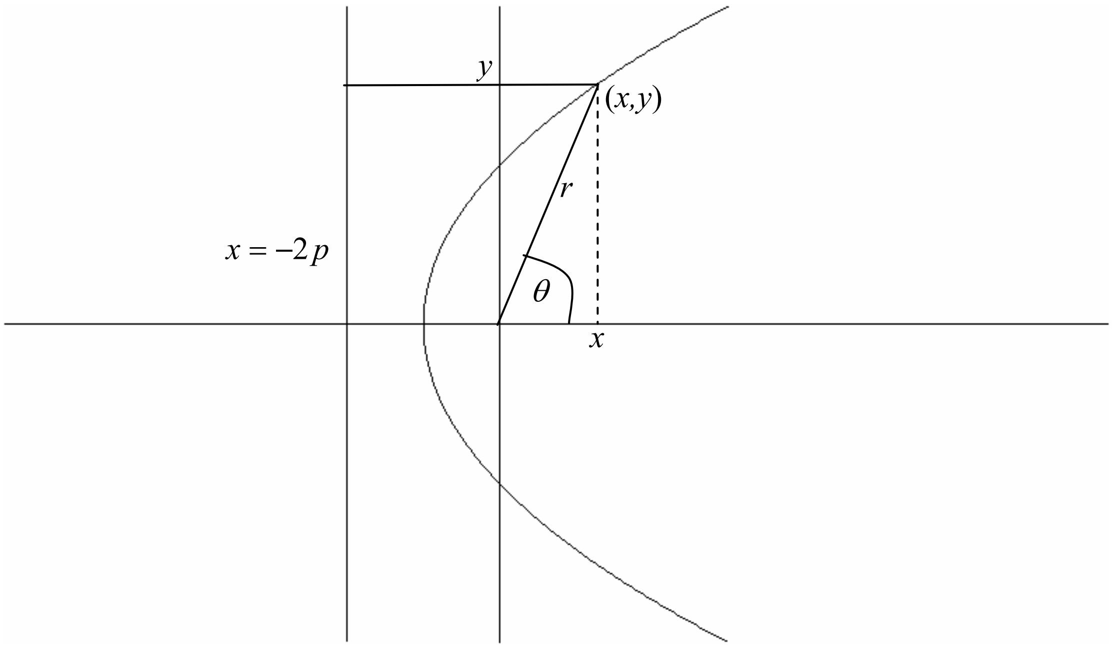
- היעזרו בהגדרה של אליפסה מקבוצה א וסמנו בשרטוט הבא נקודות הנמצאות על **אליפסה/אליפסות**:

כמה פרבולות, אליפסות או היפרבולות ניתן לסמן בכל שרטוט? הסבירו.

V. חתכי החרוט בקואורדינאטות פולאריות:

קל לפתח את המשוואה המתארת את חתכי החרוט בקואורדינאטות פולאריות, כאשר קובעים את הראשית במוקד ואת המדריך בישר המקביל, למשל לציר y ומתייחסים להגדרות על-פי האקסצנטריות.

- הביטו בשרטוט ורשמו את היחס בין המרחקים של נקודה כלשהי על העקום (x,y): מהמוקד אשר בראשית הצירים ומהמדריך אשר משוואתו: $x=-2p$.



- וודאו שהמשוואה הפולארית מתלכדת עם המשוואה הקרטזית, על-ידי שימוש בכללי המעבר: $\tan\theta=\frac{y}{x}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$.

VI. שקילות ההגדרות האנליטיות:

כדי להראות את שקילות ההגדרות מקבוצה א לאלה מקבוצה ב נוח לבחור מדריך מקביל לאחד הצירים ומוקד על הציר השני.

בדקו שההגדרות אכן שקולות:

- עבור הפרבולה:

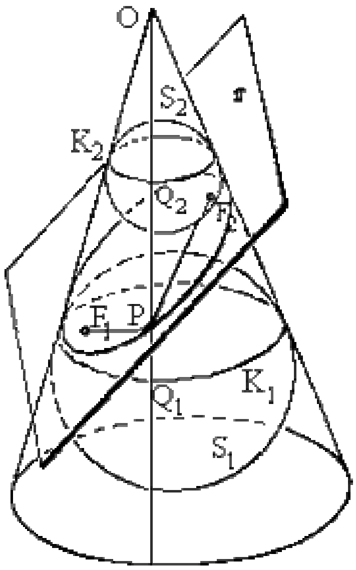
המשוואה המתקבלת מקבוצה א עבור מוקד: $(p,0)$ ומדריך: $x=-p$:

המשוואה המתקבלת מקבוצה ב עבור מוקד: $(p,0)$ ומדריך: $x=-p$:

- עבור האליפסה וההיפרבולה:

המשוואה המתקבלת מקבוצה **ב** עבור מוקד: $(p,0)$ ומדריך: $x=-p$:

הצדקת השקילות להגדרות על-פי קבוצה א לפי אפיון המשוואות או לפי מציאת המוקדים:



VI. שקילות ההגדרות האנליטיות להגדרות הגיאומטריות:

בשנת 1822 פרסם המתמטיקאי הבלגי ג'רמינל פייר דנדלין (Germinal Pierre Dandelin, 1794-1847) הוכחה פשוטה ויפה לשקילות ההגדרות של העקומים כחתכי חרוט לאלה המתקבלים מההגדרות שבקבוצה א. הוכחה אחרת, הנשענת על אלגברה ומעט גיאומטריה אנליטית סיפק גלילאו כמאתיים שנה קודם לכן.

כאשר כתב אפולוניוס את ספרו על חתכי החרוט הוא חקר את תכונותיהן המישוריות של העקומים, אשר ידע כי אפשר לקבלם על-ידי חיתוך של חרוט אינסופי עם מישור. הוא עסק, למשל, בתכונות של המשיקים והנורמאלים לעקומים אלה.

נתחיל לטפל באליפסה: השאלה הנשאלת היא היכן נמצאים המוקדים של האליפסה הנוצרת מחיתוך של מישור עם חרוט ישר?

דנדלין הוכיח כי **העקום המתקבל כאשר מישור חותך חרוט בחתך שהוא עקום סגור הוא אליפסה**, על-ידי מציאת מוקדי האליפסה.

- הצטרפו אליו ל**הוכחה**:

המישור π חותך את החרוט, כמתואר בציור. הכדור S_1 משיק לחרוט במעגל K_1 ולמישור בנקודה F_1. הכדור S_2 משיק לחרוט במעגל K_2 ולמישור בנקודה F_2.

מה ניתן לומר על שני המעגלים K_1 ו- K_2 ?

____

מה ניתן לומר על האורך של קטע המחבר בין שתי נקודות על שני מעגלים אלה ועובר בקדקוד החרוט?

____

הביטו בנקודה P אשר על העקום התוחם את חתך החרוט. העבירו ישר דרכה ודרך קדקוד החרוט. סמנו את נקודות החיתוך של הישר עם המעגלים K_1 ו- K_2 ב- Q_1 ו- Q_2 בהתאמה.

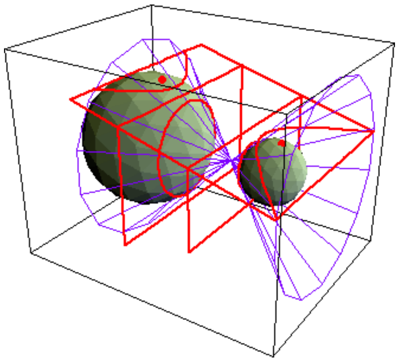
מה תוכלו לומר על אורכי הקטעים: PF_1 ו- PQ_1 ? ______________________________

מה תוכלו לומר על אורכי הקטעים: PF_2 ו- PQ_2 ? ______________________________

היכן נמצאים, אם כן, מוקדי האליפסה?

____

כפי שראינו לעיל, דנדלין הוכיח את שקילות ההגדרה של האליפסה כמקום גיאומטרי של נקודות אשר סכום מרחקיהן משתי נקודות נתונות הוא קבוע להגדרתה כחתך סגור של חרוט אינסופי ישר. אפשר להרחיב את ההוכחה הנ"ל גם למקרה של היפרבולה ולמקרה של פרבולה.



נסו לעשות זאת עבור **היפרבולה**:

דמיינו שני כדורים החסומים בחרוט ומשיקים למישור החיתוך.

מה מאפיין את המיקום של שני הכדורים?

___

ניתן לבצע שלבים דומים לאלה שהופיעו בהוכחה הקודמת, תוך התייחסות לישרים המחברים נקודה על מעגל השקה אחד עם הקדקוד ועוברים גם דרך נקודה על מעגל ההשקה השני. תוכלו להיעזר בשרטוט המצורף כאן. קווי הרשת התוחמים את החרוט הם בעלי תכונה זו.

חיזרו על השלבים של ההוכחה הקודמת בשינויים קלים והוכיחו כי **חתך פתוח של חרוט אינסופי המתקבל מחיתוך עם מישור שאינו מקביל לקו היוצר של החרוט הוא היפרבולה**.

___

___

___

___

גם עבור **פרבולה** אפשר להפעיל את ההוכחה של דנדלין (הוכחה זו נמצאת בעל"ה 9, עמ' 56-57,במאמר מאת עמוס אלטשולר). אנו נשתמש בהוכחה של גלילאו:

נשתמש במעט גיאומטריה אנליטית ונתייחס אל הגרף של הפונקציה: $y = kx^2$.

הוכיחו כי הוא פרבולה על-פי הגדרתה כמקום גיאומטרי במישור, כלומר מצאו את המוקד ואת המדריך שלה:

___

___

___

___

___

___

___

___

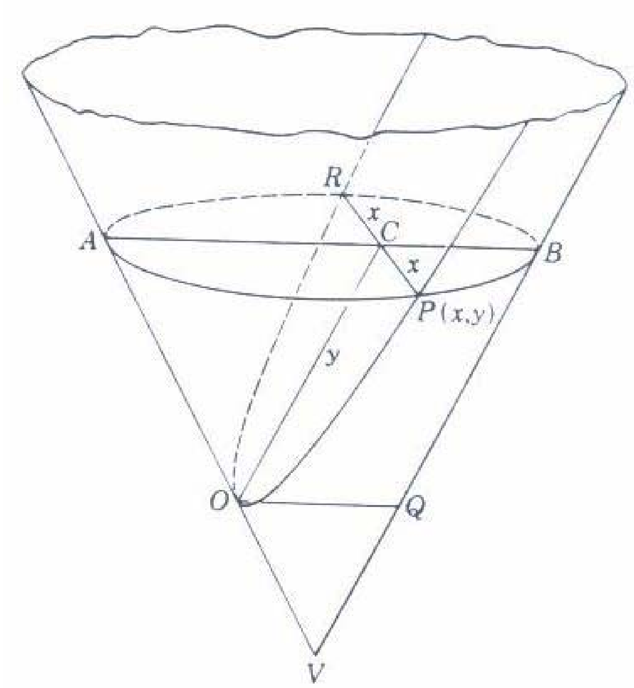
___

___

אנו נחפש את משוואת העקום המתקבל מחיתוך של חרוט ישר עם מישור המקביל לציר החרוט:

נמקם מערכת צירים מישורית במישור החיתוך, כך שהראשית בנקודה O וציר y מקביל לקו היוצר של החרוט. נסמן את הנקודה שעל העקום ב- $P(x,y)$.

הנקודות A, P, B, R מונחות על מעגל הנמצא במישור המאונך לציר החרוט, כך ש- AB קוטר המאונך ל- PR בנקודה C.



השלימו :

- $x^2 = AC \cdot CB$. נימוק : ______________________________
- המרובע BCOQ הוא : ______________________________
- $CB = OQ$. נימוק : ______________________________
- $x^2 = AC \cdot OQ$. נימוק : ______________________________
- המשולשים OAC ו- VOQ הם : ______________________________
- מיחס הדמיון נקבל : $\frac{AC}{OQ} = \frac{OC}{VQ} = \frac{y}{OV}$
- כלומר : $AC = \frac{OQ}{OV} y$
- ולכן : $x^2 = \frac{OQ^2}{OV} \cdot y$ נימוק :

____

____

כדי להצדיק שמצאנו משוואה של פרבולה יש להסביר מדוע הגודל $\frac{OQ^2}{OV}$ הוא קבוע עבור מישור חותך קבוע המקביל לקו יוצר של חרוט ישר אינסופי נתון ומדוע גודל זה משתנה כאשר המישור משתנה במקביל לקו היוצר והחרוט נשאר, כמובן, קבוע.

- הסבירו:

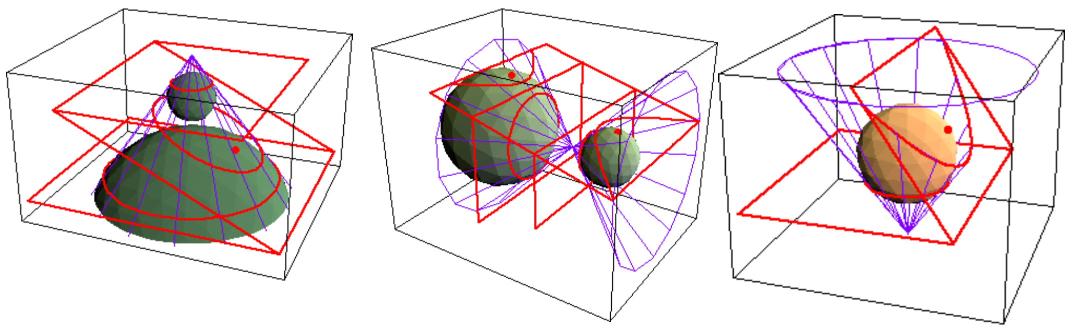
____

____

____

היכן נמצאים המוקד והמדריך של החתכים הקוניים (על-פי ההגדרות של קבוצה ב)?

דנדלין הוכיח גם כי העקומים מקבוצה ב הם אכן חתכי חרוט בהוכחה ישירה הנשענת על שיקולים טריגונומטריים פשוטים ביותר. גם בהוכחה זו, יש לדמיין כדור המשיק לחרוט ולמישור החותך. עבור היפרבולה ואליפסה יש שני כדורים כאלה ועבור פרבולה יש כדור אחד.



המוקד של העקום הוא נקודת ההשקה של הכדור למישור החותך, והמדריך של העקום הוא ישר החיתוך בין המישור החותך ובין המישור בו מונח מעגל ההשקה של הכדור לחרוט.

הוכחה זו נמצאת למשל באתר:

http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html

באתר: http://www.edmath.org/MATtours/ellipses/ellipses1.01.2.html אפשר למצוא הצדקה לכך שכל אליפסה היא חתך של חרוט. כלומר, בהינתן אליפסה מוצאים חרוט אשר היא מהווה חתך שלו.

מקורות והצעות לקריאה נוספת:

אלטשולר ע., (1991), חתכי חרוט בגישה סינטתית, *עלי"ה 9, עמ' 56-57*

שריקי ע., דוד ח., (2001), פרבולה וחתכי חרוט אחרים, אצל: שריקי ע., "קידמה" – קידום ידע בדידקטיקה ובמתמטיקה, אוגדן למורה, *"קשר חם" המרכז הארצי לקידום, שיפור וריענון החמנוך המתמטי, הטכניון.*

Ogilvy, C. S., (1969), *Excursions in Geometry*, Dover Publishers,Inc. New York. p. 56-85

Olmstead, E. A., (1998), Exploring The Locus Definitions of the Conic Sections, in: *The Mathematics Teacher, Vol. 91, No. 5, p. 428-434.*

http://ccins.camosun.bc.ca/~jbritton/jbconics.htm
http://csep10.phys.utk.edu/astr161/lect/history/newtonkepler.html
http://en.wikipedia.org/wiki/Conic_sections
http://jwilson.coe.uga.edu/emt669/Student.Folders/Jones.June/conics/conics.html
http://mathdemos.gcsu.edu/family_of_functions/conic_gallery.html
http://mathworld.wolfram.com/ConicSection.html
http://nsm1.nsm.iup.edu/gsstoudt/conics/conics.html
http://online.redwoods.cc.ca.us/instruct/darnold/MultCalc/PolarConics/conics.htm
http://www.cut-the-knot.com/proofs/conics.html
http://www.edmath.org/MATtours/ellipses/ellipses1.01.2.html
http://www.jalacy.com/conics/java.shtml
http://www.keypress.com/sketchpad/java_gsp/conics.html
http://www.krellinst.org/UCES/archive/resources/conics/
http://www.krellinst.org/UCES/archive/resources/conics/node5.html
http://www.math2.org/math/algebra/conics.htm
http://www.xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html
http://www3.adnc.com/~topquark/math/conicsec.html