הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

״קשר-חם״ : ל**ק**ידום **ש**יפור ו**ר**יענון ה**ח**ינוך ה**מ**תמטי

נושא: מעבר מהוראת מתמטיקה באופן אלגוריתמי להוראה הדורשת הבנה - באמצעות ״היפוך״ השאלה

הוכן ע״י: רותי רייז.

תקציר: בחומר מוצגת דרך לשילוב בהוראה של שאלות מתמטיות אשר עשויות להצביע על הבנת הנושא המתמטי הנלמד. הדבר נעשה באמצעות ״היפוך השאלה״. מובאות דוגמאות מתחומים שונים.

מילות מפתח: מספרים מכוונים, מספר חיובי, מספר שלילי, אלגברה, מערכת משוואות ליניאריות, פונקציה ממעלה ראשונה, פונקציה לינארית, פונקציה ממעלה שניה, פרבולה, אנליזה, חשבון דיפרנציאלי, חקירת פונקציה, נקודות אפס, נקודות קיצון.

החומר הוגש במסגרת: הכנס הארצי ה- 13 של ״קשר-חם״, מרץ 2004.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 3 עמודים.

מעבר מהוראת מתמטיקה באופן אלגוריתמי להוראה הדורשת הבנה - באמצעות "היפוך" השאלה

הוראת המתמטיקה מבוססת על תרגול של הנושאים הנלמדים. תרגול כזה מתבצע בדרך כלל באמצעות פתרון של מספר רב של תרגילים, בהתאם לאלגוריתם ידוע מראש, שעשוי להביא לרכישה של מיומנות בפתרון אלגוריתמי של התרגילים. נשאלת השאלה האם תלמידים שרכשו מיומנות זו בהכרח מבינים את הנושא הנלמד? על מנת לענות על שאלה זו, רצוי לשלב בהוראת המתמטיקה שאלות אשר עשויות להצביע על הבנה של הנושא המתמטי הנלמד. אחת מן הדרכים לבניית שאלות כאלו היא באמצעות "היפוך" השאלה. ההיפוך נעשה באופן הבא: לוקחים את התוצאה / התשובה הסופית של השאלה, ומבקשים מן התלמידים לקבוע מהם הנתונים של השאלה שהביאו לתוצאה / תשובה זו. לעיתים, יש צורך לשנות במעט את ניסוח התוצאה הסופית, על מנת ליצור שאלה הדורשת גם הבנה.
להלן מספר דוגמאות בנושאים מתמטיים שונים:

דוגמא ראשונה – חיבור מספרים מכוונים

במהלך הוראת הנושא של חיבור מספרים מכוונים, מקבלים התלמידים לחבר אוסף של מספרים מכוונים כאשר המחובר הראשון חיובי או שלילי והמחובר השני חיובי או שלילי. בדרך כלל, לאחר שקיבלו את התוצאה הסופית, הם אינם מתפנים להבין את מהות התוצאה שקיבלו או לבדוק האם התוצאה שקיבלו היא הגיונית. למשל: מתי התוצאה שהתקבלה קטנה מן המחובר הראשון?
להלן מספר הצעות להיפוך השאלה:

<u>גירסא א' – ספציפית לתוצאה (5+)</u>

1. נא לתת דוגמא לשני מספרים שסכומם (5+).
2. נא לתת דוגמא נוספת לשני מספרים שסכומם (5+).
3. כמה זוגות של מספרים שסכומם (5+) קיימים?

<u>גירסא ב' – ספציפית לתוצאה (5+)</u>

1. נא לתת דוגמא לשני מספרים חיוביים שסכומם (5+).
2. נא לתת דוגמא נוספת לשני מספרים חיוביים שסכומם (5+).
3. כמה זוגות של מספרים שסכומם (5+) קיימים, בהנחה ששני המספרים חיוביים?

<u>גירסא ג' – ספציפית לתוצאה (5+)</u>

1. נא לתת דוגמא לשני מספרים שסכומם (5+), כך שאחד מהם חיובי ואחד מהם שלילי.
2. נא לתת דוגמא נוספת לשני מספרים שסכומם (5+), כך שאחד מהם חיובי ואחד מהם שלילי.

3. כמה זוגות של מספרים שסכומם (5+) קיימים, בהנחה שאחד מהמספרים חיובי ואחד מהמספרים שלילי?

* האם יתכנו שני מספרים שליליים שסכומם (5+)?

גירסא ד' – כללי

1. נא לתת מספר דוגמאות לשני מספרים שהאחד חיובי והשני שלילי, כך שסכומם יהיה חיובי. כמה דוגמאות ניתן לתת? אילו תנאים צריכים לקיים שני המספרים?
2. נא לתת מספר דוגמאות לשני מספרים שסכומם חיובי.
כמה דוגמאות ניתן לתת? האם יתכן ששני המחוברים יהיו חיוביים? שניהם שליליים? אחד חיובי ואחד שלילי?
3. נא לתת מספר דוגמאות לשני מספרים שסכומם שלילי.
כמה דוגמאות ניתן לתת? האם יתכן ששני המחוברים יהיו חיוביים? שניהם שליליים? אחד חיובי ואחד שלילי?
4. האם ניתן לחבר שני מספרים מכוונים ולקבל תוצאה הקטנה מכל אחד מן המחוברים?

* שאלות דומות ניתן לשאול לגבי פעולות החשבון האחרות.

דוגמא שניה – פתרון מערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים

במהלך הוראת הנושא של פתרון מערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים, נחשפים התלמידים למקרים השונים הקיימים של פתרון מערכת: מצב שבו למערכת המשוואות יש פתרון יחיד, מצב שבו למערכת המשוואות אין פתרון ומצב שבו למערכת המשוואות יש אינסוף פתרונות. נשאלת השאלה האם קיימת דרך שבה התלמיד יכול לבדוק האם אכן זהו מספר הפתרונות המתאים למערכת המשוואות הנתונה? בדיקה כזו ניתן לעשות באמצעות הובלת התלמידים למצבים השונים באמצעות היפוך הבעיה. להלן מספר הצעות להיפוך:

גירסא א'

1. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים, שיש לה **פתרון יחיד**.
2. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים, **שאין לה פתרון**.
3. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים **שיש לה אינסוף פתרונות**.

גירסא ב'

1. נא לתת דוגמא למערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים, שיש לה **פתרון יחיד (2,-1)**.
2. האם יתכן שלמערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים, **לא יהיה פתרון**?
3. האם יתכן שלמערכת של שתי משוואות לינאריות עם שני נעלמים, יהיו **אינסוף פתרונות**?

דוגמא שלישית – פונקציה ממעלה ראשונה או שניה

במהלך הוראת נושא הפונקציה ממעלה ראשונה או שניה, מקבלים התלמידים תבנית של פונקציה ממעלה ראשונה או שניה והם מתבקשים לשרטט את הגרף שלה.
על מנת לבדוק הבנה של תכונות הפונקציה ממעלה ראשונה / שניה, ניתן להפוך את השאלה באופן הבא: לתת להם את התיאור הגרפי של הפונקציה ולבקשם למצוא את תבנית הפונקציה. או: לבקש מהם לשרטט ציור כלשהו, ולבקשם לקבוע את אוסף הפונקציות שמהן הוא מורכב.

דוגמא רביעית – חקירת פונקציה באמצעות אנליזה

במהלך חקירת פונקציה נותנים לתלמידים תבנית מסוימת של פונקציה, ומבקשים מהם לחקור אותה. ניתן להפוך את השאלה באופן הבא:
נא לתת דוגמא לפונקציה שיש לה:

א. נקודת אפס אחת ונקודת קיצון אחת.

ב. שתי נקודות אפס ונקודת קיצון אחת.

ג. שלוש נקודות אפס וללא נקודת קיצון.

לסיכום, "היפוך" השאלה:

1. מזמן ניתוח מעמיק של התופעה המתמטית הקשורה לנושא הלימוד (תוך תשומת לב למקרים השונים, מקרים מיוחדים וכו').
2. מצביע על הבנה של חומר הלימוד.
3. מאפשר סיכום של נושא הלימוד.
4. מאפשר חשיפה להיבטים נוספים הקשורים לחומר הלימוד.
5. מצביע על כך שלבעיה מתמטית אין בהכרח פתרון יחיד (במקרים בהם מוצגת שאלה פתוחה).