הטכניון - מכון טכנולוגי לישראל המחלקה להוראת הטכנולוגיה והמדעים

"קשר-חם": לקידום שיפור ורענון החינוך המתמטי

הנושא: האינטגרל המסויים

הוכן ע"י: אביבה ברש.

תקציר: בחומר מובאת הצעה לפתיחה של נושא האינטגרל המסויים, באמצעות בעיית חישוב שטח מחיי היום יום. באמצעות פתרון הבעיה בשלבים, מגיעים להגדרה של האינטגרל המסויים.

מילות מפתח: חדו"א, אנליזה, חשבון אינטגרלי, אינטגרל מסויים, שטח.

החומר הוגש במסגרת: "קשר-חם" - בתל-אביב, סדנא שניה בשנה"ל תשנ"א, אפריל 1991.
"קשר-חם" - בבאר-שבע, סדנא שניה בשנה"ל תשנ"א, מאי 1991.
"קשר-חם" - בחיפה, סדנא שלישית בשנה"ל תשנ"א, מאי 1991.

החומר מכיל בנוסף לעמוד הפתיחה: 5 עמודים.

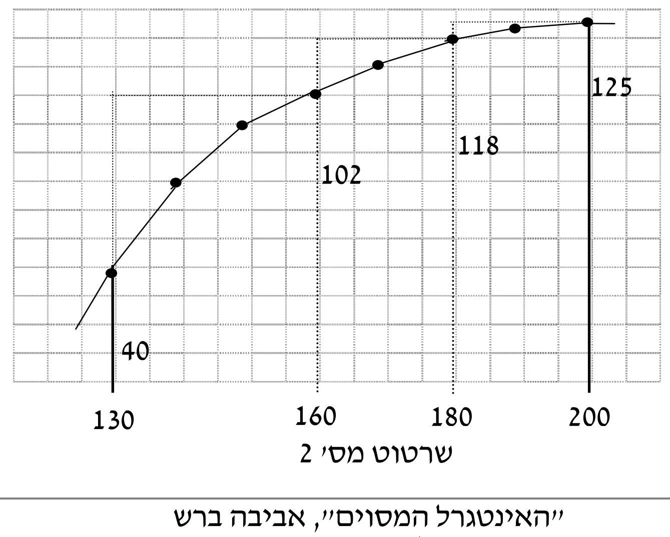
האינטגרל המסוים

<u>מטרת השיעור:</u> להגיע אל הגדרת המושג "אינטגרל מסוים" ומשמעותו.
<u>הידע הקודם:</u> מציאת פונקציה קדומה (אינטגרל לא מסוים).
<u>הצגת הנושא:</u> במקום להציג את הנושא באופן ישיר, מוצע כאן להתחיל בבעיה שנראית מוכרת מתוך לימודי הגיאומטריה: קביעת שטח. אלא שהפעם השטח תחום ע"י קוים שלא כולם ישרים. זהו חידוש ולכן השאלה מעוררת מוטיבציה לפתרון.

<u>מהלך השיעור:</u> לתלמידים מוצגת הבעיה הבאה:
חלקת שדהו של איכר משתרעת בין כביש לנהר ומוגבלת משני צדדיה ע"י שביל עפר וגדר המאונכים לכביש. הגדר נמצאת באבן דרך מס' 130 והשביל נמצא באבן דרך מס' 200 (ראה שרטוט מספר 1).

שרטוט מס' 1

האיכר החליט לחלק את השדה בין שלושת בניו באופן שווה. כשרצה לחשב את השטח ולבצע חלוקה בהתאם נתקל בבעיה.
היות שהנהר הלך והתרחק מהכביש ככל שהתקדם מן הגדר לכוון השביל, היה לו ברור, שחלוקת קטע הכביש לשלושה חלקים שווים אינו פתרון צודק (בשלב זה אפשר לתת לתלמידים לנסות לחלק את השדה לשלושה חלקים שווי שטח). האיכר ניסה לחלק את השדה באופן המתואר בשרטוט מס' 2.



שרטוט מס' 2

כדי להיות שלם עם החלטתו מדד האיכר את גבולות החלקות שנוצרו וחישב את שטחיהן "בערך", כאילו היו מלבנים. להלן מדידותיו (שרטוט מס' 2) וחישוביו :
R_i מייצג שטח מלבן שמספרו הסידורי i .
S_i מייצג חלק משטח השדה שמספרו הסידורי i .

$R_1 = (160\text{-}130)\cdot 102 = 3{,}060$ **ולכן** : $S_1 < 3{,}060$

$R_2 = (180\text{-}160)\cdot 118 = 2{,}360$ **ולכן** : $S_2 < 2{,}360$

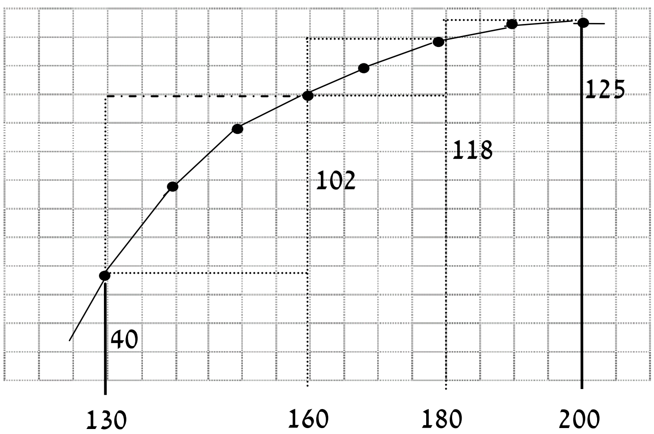
$R_3 = (200\text{-}180)\cdot 125 = 2{,}500$ **ולכן** : $S_3 < 2{,}500$

האיכר עדיין לא היה מרוצה וחיפש אומדן נוסף. היות שעד כה חישב את שטחי החלקות ע"י מלבנים גדולים מדי, חיפש מלבנים קרובים לשטח הרצוי, אך קטנים ממנו. כך קיבל חסם תחתון (חסם מְלְרַע) לכל שטח Si (ראה שרטוט מספר 3). והרי חישוביו :

$$R_1 = (160\text{-}130)\cdot 40 = 1200$$
$$R_2 = (180\text{-}160)\cdot 102 = 2040$$
$$R_3 = (200\text{-}180)\cdot 118 = 2360$$

לפיכך :

$$1{,}200 < S_1 < 3{,}060$$
$$2{,}040 < S_2 < 2{,}360$$
$$2{,}360 < S_3 < 2{,}500$$

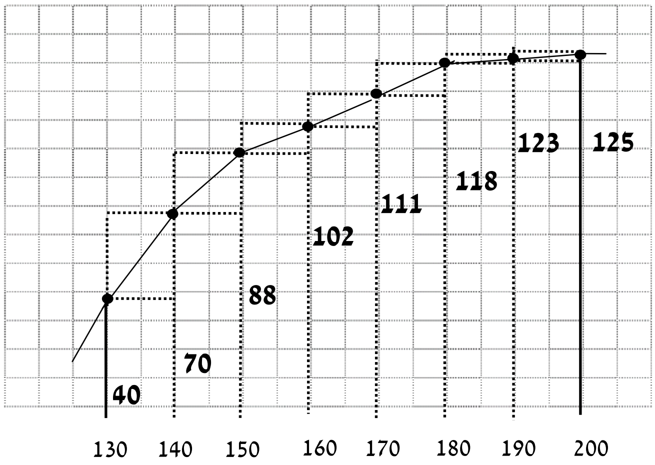


שרטוט מס' 3

גם זה לא היה פתרון טוב, אך נתן לאב רעיון איך לאמוד את השטח S של החלקה כולה (משימה לתלמידים). הוא חיבר את שטחי המלבנים הנ"ל וקיבל : $5{,}600 < S < 7{,}920$.

<u>משימה לתלמידים</u> : נסו לעזור לאב למצוא אומדן מדויק יותר, כלומר תחום מספרי יותר מצומצם. בכתה נקבל בדרך-כלל הצעות לחישוב על-ידי טרפז במקום מלבן (ומן הראוי לבצע זאת), או מלבנים יותר "דקים".

האב החליט על חלוקה יותר "מעודנת" של קטע הכביש וביצע עוד מספר מדידות, כמתואר בשרטוט מספר 4.



שרטוט מס' 4

הוא חישב את השטח כסכום שטחי המלבנים שנוצרו. למלבנים הנוגעים בנהר בקדקוד ימני הוא קרא מלבנים ימניים (וסימנם R_n) ואלה נותנים לו חסם עליון (חסם מלעיל), ואילו למלבנים הנוגעים בנהר בקדקוד שמאלי הוא קרא מלבנים שמאליים (וסימנם L_n) ואלה נותנים לו חסם תחתון (חסם מִלְרַע). והרי חישוביו (יינתן לתלמידים כעבודה עצמית):

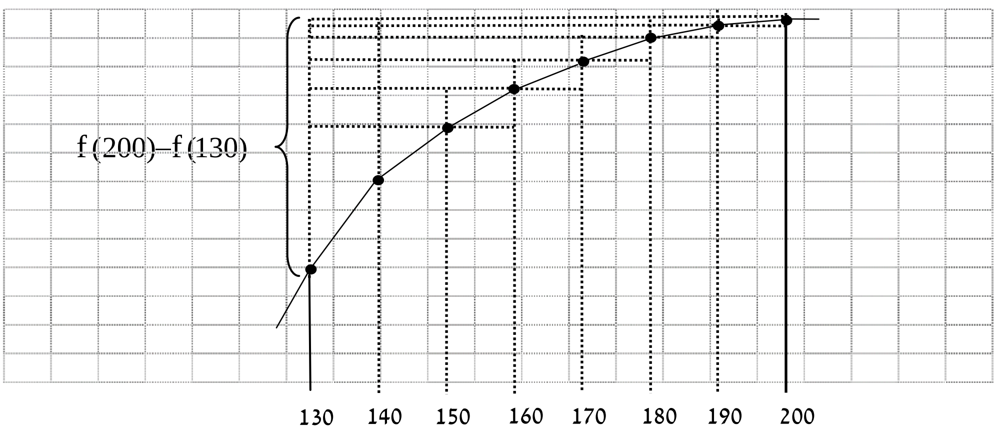
רוחב כל פס הוא: $\frac{200-130}{7}=10$

$R_n =$ סכום n מלבנים ימניים $= 10 \cdot (70 + 88 + 102 + 111 + 118 + 123 + 125) = 7,370$

$L_n =$ סכום n מלבנים שמאליים $= 10 \cdot (40 + 70 + 88 + 102 + 111 + 118 + 123) = 6,520$

כלומר: $6,520 < S < 7,370$

מה השגנו? ודאי צמצום משמעותי של טווח המספרים. כלומר אומדן יותר מדויק. הטעות שלנו בחישוב השטח לא יכולה לעלות על $| L_n – R_n |$ (שרטוט מספר 5).



שרטוט מס' 5

<u>כיצד נגיע לחישוב מדויק יותר של השטח?</u>
נתייחס לקו הנהר כאל גרף של פונקציה f, ונגביל עצמנו לשגיאה, למשל, עד כדי 100 מ"ר . כלומר, השגיאה שלנו, שכאמור תהיה לכל היותר $|Ln - Rn|$ תקיים :

$$\text{השגיאה} \le |L_n - R_n| = h \cdot |f(b) - f(a)| = \frac{|f(b) - f(a)| \cdot (b-a)}{n}$$

כאשר b, a מייצגים את אבני הדרך בגבולות השדה ו- h מייצג רוחב כל מלבן שהתקבל בחלוקת קטע הכביש ל- n חלקים שווים.

ועבור שגיאה קטנה או שווה ל- 100 נקבל : $100 \le \frac{(125-40)\cdot(200-130)}{n}$ ומכאן : $n \ge 60$,
כלומר : צריך לחלק ל- 60 פסים לפחות, כדי לקבל דיוק זה.

מובן, שאם במקום הנהר תהיה לנו פונקציה מתמטית המתארת את מסלולו הרי שנוכל לתת למחשב לערוך את החישוב .

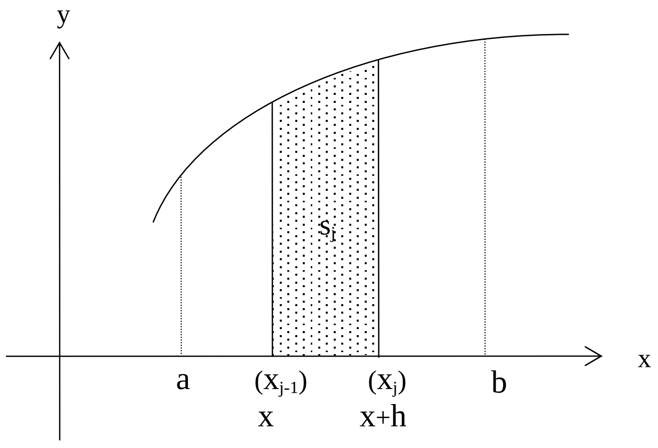
<u>משימת רשות לתלמידים</u> : לערוך תוכנית (או אלגוריתם) למחשב, לביצוע המשימה, לפי L_n או R_n.

התבוננות נוספת בביטוי השגיאה מביאה אותנו למסקנה שהשגיאה תקטן ככל ש- n יגדל (כלומר, ככל שיגדל מספר הפסים, או שנחלק ל"מלבנונים" יותר צרים).

ואם חישבנו את השטח לפי R_n, למשל, הרי : $R_n = \sum_{j=1}^{n} h \cdot f(x_j)$

ונקבל את השטח S עבור : $\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{1}^{n} h \cdot f(x_j)$

נחזור לשרטוט ונתבונן ב"מלבנון" מייצג :



מתוך הדיון הקודם :

$$h \cdot f(x_{j-1}) < S_j < h \cdot f(x_j)$$

או

$$h \cdot f(x) < S_j < h \cdot f(x+h)$$

S_j תלוי בבחירת x_j . נסמן ב- $S(x_j)$ את הפונקציה המתארת את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה, ציר ה- x, והישרים המאונכים לציר ה- x ב- a וב- x_j.

ואז : $S_j = S(x_j) - S(x_{j-1})$

או לפי הסימון החדש : $S_j = S(x+h) - S(x)$

ולכן: $h \cdot f(x) < S(x+h) - S(x) < h \cdot f(x+h)$

מובן שחישוב S_j טוב יותר ככל ש- h קטן יותר ($n \to \infty$ עבור גבול הסכומים של R_n, מתאים לנו ל- $h \to 0$ כי: $h = \frac{b-a}{n}$).

ומכאן הדרך מיידית אל הפונקציה הקדומה והאינטגרל המסוים:

$$\lim_{h\to 0} f(x) < \lim_{h\to 0} \frac{S(x+h)-S(x)}{h} < \lim_{h\to 0} f(x+h)$$
$$\Rightarrow f(x) = S'(x)$$

ולכן: $S(x) = F(x) + C$

כאשר $F(x)$ היא פונקציה קדומה של $f(x)$.

לפי הגדרת הפונקציה $S(x)$ נוכל להסיק כי $S(a) = 0$ ומכאן:

$$0 = S(a) = F(a) + C \quad \Rightarrow \quad C = -F(a)$$

<u>איזה ערך של הפונקציה S אנחנו מחפשים?</u>

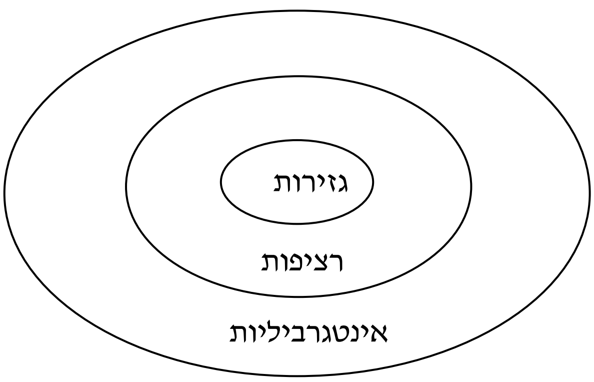
$$S(b) = F(b) + C \quad \Rightarrow \quad S(b) = F(b) - F(a)$$

ביטוי זה נקרא האינטגרל המסוים של הפונקציה $f(x)$ ומסומן: $\int_a^b f(x)dx$

<u>יתרונות השיטה:</u>

1) המחשת המושג המופשט: אינטגרל מסוים והקשר בינו לבין חישובי שטחים.
2) למידה בדרך הגילוי וההפתעה המתקבלת עם מציאת הקשר הנ"ל.
3) שימוש במונחים מתמטיים כמו חסם מלרע ומלעיל.
4) "נגיעה" באנליזה נומרית.
5) שילוב תוכנית מחשב.
6) ייצוג של האינטגרל המסוים גם כגבול של סכומים.

<u>הערה</u>: לשם הגדרת האינטגרל לפי סכומים לא נדרש ידע קודם בנגזרות. בדרך זאת מודגשת העובדה שתכונת האינטגרביליות של פונקציה, יותר בסיסית מתכונת הגזירות, כפי שניתן לראות בדיאגרמה:



הודות ליתרונות הללו יש להניח שהלימוד יהיה מעמיק יותר ויופנם המושג החדש של האינטגרל ומכאן תהיה הדרך לשליטה ומיומנות באינטגרציה - קצרה הרבה יותר.